Manipulationen an Funktionstermen

Nun kommt ein sehr wichtiger Schritt, die Loslösung von der reinen Rechteck-Quadrat- bzw. Flächeninhalt-Umfang-Vorstellung, denn es ergibt sich nicht immer so schön eine der beiden Standardsituationen. Viele andere Optimierungsprobleme können gelöst werden, indem sie auf eine der beiden Standardformen „gebracht" werden:

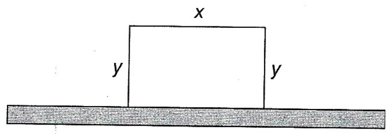
1. *Maximales Produkt bei konstanter Summe.*
2. *Minimale Summe bei konstantem Produkt.*

In diesem Zusammenhang spricht man von erlaubten Umformungen der zu maximierenden bzw. minimierenden Zielfunktion.

Beispiel 3

An eine „hinreichend lange" Gartenmauer soll mit 8 m Zaun ein *möglichst großes* rechteckiges Kaninchengehege eingezäunt werden. Wie sind Länge und Breite dafür zu wählen?

Lösungsskizze:



Aus $x + 2y = 8$ folgt $x = 8 - 2y$.
$x \cdot y \to \text{Max}$
Für x einsetzen liefert
$F(y) = y \cdot (8 - 2y) \to \text{Max}$
Hier ist leider die Summe der beteiligten zwei Faktoren nicht konstant.

Aber: Statt die Maximalstelle der Funktion $F(y)$ zu suchen, kann man auch die Maximalstelle der Funktion $2F(y)$ suchen: Eine vertikale Streckung des Graphen mit einem positiven Faktor verändert die Stelle des Maximums nicht. Wir dürfen also zum Zweck des Suchens der Maximumstelle mit 2 multiplizieren:
$\overline{F}(y) = (2y) \cdot (8 - 2y) \to \text{Max}$
Dies ist Standard: $y_0 = 2$ und $x_0 = 4$.

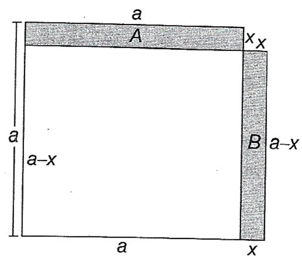
Erlaubte Umformungen bzw. Vereinfachungen von Zielfunktionen

Die Extremstelle einer Funktion ändert sich nicht, wenn man die folgen-

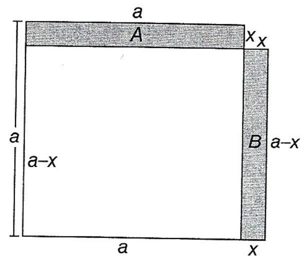
Zwei wichtige elementargeometrische Erkenntnisse

Satz 1: Unter allen **umfanggleichen Rechtecken** hat das **Quadrat maximalen Flächeninhalt**.

Begründung: Ausgehend vom Quadrat zeigen wir: *Jedes andere zu dem Quadrat umfanggleiche Rechteck hat einen kleineren Flächeninhalt.*
Das Quadrat $Q(a)$ wird zu einem umfanggleichen Rechteck verformt, indem eine Seite um x verkürzt und die andere um x verlängert wird.
Wir erhalten das Rechteck $RE(a - x, a + x)$.
Zu zeigen ist: Die Fläche des Rechtecks ist kleiner als die des Quadrats.



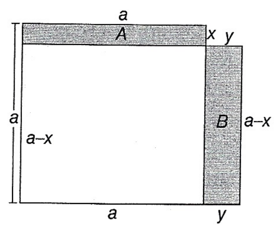
1. Weg: Rein geometrisch (Diese Idee hatte bereits Euklid um ca. 300 v. Chr.)
Beim Übergang von Quadrat zum umfanggleichen Rechteck wird die Fläche A weggenommen und die Fläche B kommt hinzu. A und B sind gleichbreite Streifen mit der Breite x. Aber A hat die volle Länge a, während B die verkürzte Länge $a - x$ hat. Ohne Formeln (z. B. durch gedachtes Übereinanderlegen der beiden Streifen) ist klar: $A > B$. Somit ist flächenmäßig mehr weg- als dazugekommen; der Flächeninhalt wurde insgesamt verkleinert.



2. Weg: Rechnerisch-algebraisch
Die Flächeninhalte von Quadrat und Rechteck werden berechnet und verglichen:
Für $x \neq 0$ ist $(a - x) \cdot (a + x) = \underbrace{a^2 - x^2}_{\text{RE-Inh.}} < \underbrace{a^2}_{\text{QU-Inh.}}$

Satz 2: Unter allen **flächengleichen Rechtecken** hat das **Quadrat minimalen Umfang**.

Begründung: Wir zeigen analog zu Satz 1:
Jedes andere flächengleiche Konkurrenzrechteck hat einen größeren Umfang als das Quadrat.
Ein Quadrat mit Seitenlänge a werde zu einem flächengleichen Rechteck mit den Seitenlängen $a - x$ und $a + y$ verformt. Die Änderungen des Umfangs betragen $-2x$ und $+2y$.
Wir haben also zu zeigen: $-2x + 2y > 0$ bzw. $y > x$.
Der Streifen B ist wegen $a - x < a$ sicher kürzer als A, daher muss B zum Ausgleich (Flächengleichheit) *breiter* sein: $y > x$.



Zwei neue Sätze

Damit haben wir also in rein geometrischem Kontext über variable, nichtnegative Faktoren (Summanden) $x \geq 0$ bzw. $y \geq 0$ bewiesen (x bzw. y entsprechen der Länge bzw. Breite des Rechtecks):

Satz 1: Es sei $x + y = c$ (dem entspricht ein konstanter, halber Rechteckumfang)
Dann gilt: $x \cdot y \to \text{Max} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = \frac{c}{2}$ [Max. Flächeninhalt $\Leftrightarrow$ QUADRAT]

Satz 2: Es sei $x \cdot y = c$ (dem entspricht ein konstanter Rechteckflächeninhalt)
Dann gilt: $x + y \to \text{Min} \Leftrightarrow x_0 = y_0 = \sqrt{c}$ [Min. (Halb-)Umfang $\Leftrightarrow$ QUADRAT]