Diese Version ist die Grundlage für den Workshop bei der Bildung-Online HALL 2006

==

Beispiele für den Einsatz des Computeralgebrasystems MAXIMA mit der GUI WXMaxima (und von Geogebra) im Unterricht der Sekundarstufe II

Diese Beispiele sind nur z.T. systematisch geordnet.

Auf die GPL-Lizenzen der Programme wird ausdrücklich hingewiesen.

Zusammengestellt von Johann Weilharter, BHAK-BHAS Tamsweg im Zusammenhang mit dem MNI-Projekt „Mathematik lernen mit dem Classserver von Microsoft“

Kontakt-E-Mail: johnny.weilharter@sbg.at

Kurzfassung für BO-Workshop in Hall 2006

Installation

Programme

- Maxima
  - Quelle: http://maxima.sourceforge.net
  - Aktuelle Version 5.93
- WXMaxima
  - Quelle: http://wxmaxima.sourceforge.net
  - Aktuelle Version 0.65
- WinTexmacs
  - funktioniert bei mir nur mit Maxima 5.91
  - wird daher im Workshop nicht näher behandelt

Grundwerkzeuge

Schreibweise

- Gleichungen
  - Gleichheitszeichen
  - x+1=4
- Wertzuweisung
  - Doppelpunkt
  - a:3
- Objekte
  - Doppelpunkt
  - g:x+1=4
- Funktionen
  - Doppelpunkt+Gleichheitszeichen
  - f(x):=x^2+2

Terme

- Grundrechenarten
  - +
  - -
  - *
  - /
- numer
- Faktorzerlegung
  - factor
  - factor(x2+2*x+1)
- Polynomdivision
  - divide
  - divide(x^2+2*x+1,x+1)
- ggT und kgV
  - gcd
  - Produkt/gcd

Gleichungen

- solve
- allroots
- realroots

Grafiken

- 2D
- 3D

Funktionen

Lineare Funktionen

Grundverknüpfungen der Aussagenlogik

Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr (true) oder falsch (false) ist.

Konjunktion: sie ist nur wahr, wenn alle Teilaussagen wahr sind!

Herkömmlich

a	b	$a \wedge b$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

eine derartige Aufstellung heißt Wahrheitstafel

w = wahr (true)
f = falsch (false)

Mit Maxima

```
(%i1) und(x,y):= x and y;
(%o1) und(x , y) := x   and   y
(%i2) und(true,true);
(%o2) true
(%i3) und(true,false);
(%o3) false
(%i4) und(false,true);
(%o4) false
(%i5) und(false,false);
(%o5) false
```

wir definieren eine benutzerdefinierte Funktion "und(x,y)"

Ergebnis: die Und-Verknüpfung von zwei Aussagen ist wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Disjunktion: sie ist nur falsch, wenn beide Teilaussagen falsch sind!

Herkömmlich:

a	b	$a \vee b$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Mit Maxima:

```
(%i1)  oder(x,y):= x or y;
(%o1)  oder(x , y) := x  or  y
(%i2)  oder(true,true);
(%o2)  true
(%i3)  oder(true,false);
(%o3)  true
(%i4)  oder(false,true);
(%o4)  true
(%i5)  oder(false,false);
(%o5)  false
```

Ergebnis: die Oder-Verknüpfung von zwei Teilaussagen ist falsch, wenn beide Teilaussagen falsch sind.

Die Aussage a or b ist also wahr, wenn a oder b oder beide wahr sind (nicht ausschließendes oder)

Aussagenlogik: Grundverknüpfungen

```
(%i1) negation(x):=not(x);
(%o1) negation(x) := not x
(%i2) negation(true);
(%o2) false
(%i3) negation(false);
(%o3) true
```

Verneinung

Die Negation ist die
Verneinung einer Aussage

```
(%i4) "*****************************************************"$
(%i5) konjunktion(x,y):=x and y;
(%o5) konjunktion(x , y) := x  and  y
(%i6) konjunktion(true,true);
(%o6) true
(%i7) konjunktion(true,false);
(%o7) false
(%i8) konjunktion(false,true);
(%o8) false
(%i9) konjunktion(false,false);
(%o9) false
```

UND-Verknüpfung

Die UND-Verknüpfung ist
nur wahr, wenn beide Teil-
aufgaben wahr sind

```
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) disjunktion(x,y):=x or y;
(%o11) disjunktion(x , y) := x  or  y
(%i12) disjunktion(true,true);
(%o12) true
(%i13) disjunktion(true,false);
(%o13) true
(%i14) disjunktion(false,true);
(%o14) true
(%i15) disjunktion(false,false);
(%o15) false
(%i16)
```

ODER-Verknüpfung

Die ODER-Verknüpfung ist
nur falsch, wenn beide Teil-
aufgaben falsch sind

Wichtige Zusammenfassung

a and b ... Konjunktion von Aussage
a or b .... Disjunktion von Aussagen
not a ..... Negation von Aussagen

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Implikation und Äquivalenz                          "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) imp(a,b):= not a or b;
(%o4) imp(a , b) := not a  or  b
(%i5) imp(true,true);
(%o5) true
(%i6) imp(true,false);
(%o6) false
(%i7) imp(false,true);
(%o7) true
(%i8) imp(false,false);
(%o8) true
```

Die Negation einer Aussage a ist die Verneinung. Sie wird durch "not a" dargestellt.

Die Konjunktion von Aussagen ist die Und-Verknüpfung und wird durch "a and b" dargestellt.

Die Disjunktion von Aussagen ist die Oder-Verknüpfung und wird durch "a or b" dargestellt.

Die Implikation (auch Wenn-Dann-Verknüpfung) ist nur falsch, wenn die erste Aussage wahr und die zweite Aussage falsch ist.

```
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) eqv(a,b):=imp(a,b)and imp(b,a);
(%o10) eqv(a , b) := imp(a , b)  and  imp(b , a)
(%i11) eqv(true,true);
(%o11) true
(%i12) eqv(true,false);
(%o12) false
(%i13) eqv(false,true);
(%o13) false
(%i14) eqv(false,false);
(%o14) true
(%i15) "*****************************************************"$
(%i16)
```

Zwei Aussagen sind äquivalent, wenn sie den gleichen Wahrheitswert haben!

Die Implikation und die Äquivalenz sind zusammengesetzte Verknüpfungen.

Anmerkungen:

die Boolesche Algebra taucht im Unterricht der Sekundarstufe II in verschiendenen Ausprägungen auf:

* Mengenlehre
* Aussagenlogik
* Wahrscheinlichkeitsrechnung
* Schaltalgebra

Wahrheitstafel von Aussageformeln

Beispiel 1:

das ist eine Aussagenformel

$$(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$$

Lösung herkömmlich:

das ist eine Wahrheitstafel

a	b	A $a \wedge b$	B $a \vee b$	$(A' \vee B)$ $A \Rightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

Lösung mit Maxima:

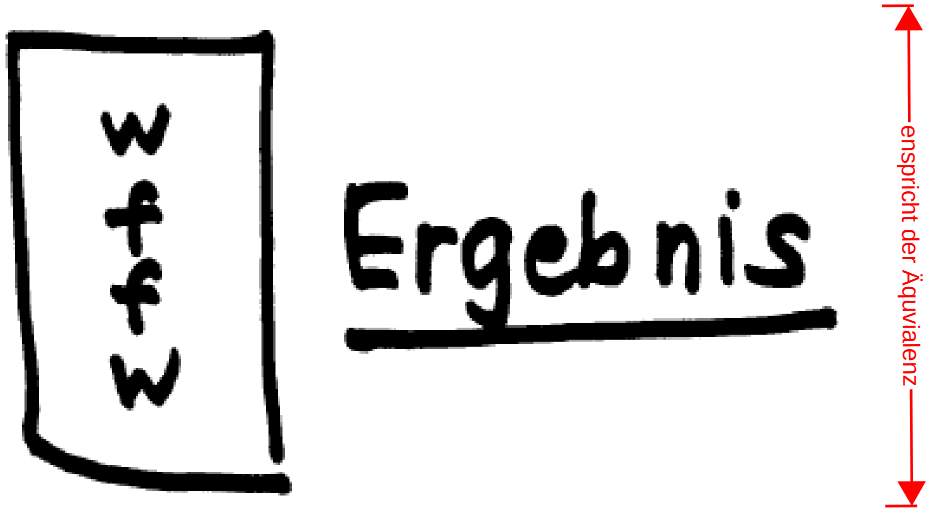
```
(%i1) formel(x,y):= not (x and y) or (x or y);
(%o1) formel(x , y) := not (x  and  y)  or  (x  or  y)
(%i2) formel(true,true);
(%o2) true
(%i4) formel(true,false);
(%o4) true
(%i5) formel(false,true);
(%o5) true
(%i6) formel(false,false);
(%o6) true
(%i7) "================================================"$
(%i8) " Das ist eine Tautologie                        "$
(%i9) "================================================"$
```

immer wahr!

Beispiel 2:

$$\overbrace{(a \vee b) \Rightarrow (a \wedge b)}^{\text{Aussageformel}}$$

Die herkömmliche Lösung:



Die Lösung mit Maxima:

```
(%i1)  formel(x,y):= not (x or y) or (x and y);
(%o1)  formel(x , y) := not (x  or  y)  or  x  and  y
(%i2)  formel(true,true);
(%o2)  true
(%i3)  formel(true,false);
(%o3)  false
(%i4)  formel(false,true);
(%o4)  false
(%i5)  formel(false,false);
(%o5)  true
(%i6)  "================================================"$
(%i7)  " Das entspricht der Äquivalenz                 "$
(%i8)  "================================================"$
```

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " TO BE OR NOT TO BE     ( Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten ) "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i9) f(p):=p or not p;          or ....... Disjunktion
(%o9) f(p) := p  or  not p        not ...... Negation
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) f(true);
(%o11) true
(%i12) f(false);
(%o12) true
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14) " Tautologie = immer wahr                              "$
(%i15) "*****************************************************"$
(%i16)
```

eine Tautologie ist immer wahr (true)

Eine Tautologie von Aussagen ist eine Zusammensetzung von Aussagen, die immer wahr ist. Eine Aussage kann wahr oder falsch sein.

wahr = true
falsch = false

Das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten (tertium non datur est) ist ein sehr bekanntes Gesetz der klassischen Logik (auch bei Hamlet, W. Shakespeare)

```
(%i1) n(u):=1-u;
(%o1) n(u) := 1 - u
(%i2) o(x,y):=x+y-x*y;
(%o2) o(x, y) := x + y + (- x) y
(%i3) bnb(x,y):=o(x,n(x));
(%o3) bnb(x, y) := o(x, n(x))
(%i4) bnb(1,1);
(%o4) 1
(%i5) bnb(1,0);
(%o5) 1
(%i6) bnb(0,1);
(%o6) 1
(%i7) bnb(0,0);
(%o7) 1
(%i8) "das ist also eine Tautologie"$
(%i9)
```

Hier verwenden wir Interpolations-polynome. Das ist praktisch, wenn kein boole'scher Datentyp vorliegt.

immer wahr = Tautologie

d.h. , diese Aussage ist immer wahr

Anmerkung: eine Aussage, die immer falsch ist, nennt man Kontradiktion

```
(%i2) "Kräht der Hahn am Mist, ändert sich das Wetter oder es bleibt
 wie es ist.

 a ... der Hahn kräht am Mist
 b ... das Wetter ändert sich"$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) " Die Wenn-Dann-Verknüpfung ist die Implikation      "$
(%i5) "*****************************************************"$
(%i6) negation(u):=not(u);
(%o6)  negation(u) := not u
(%i7) oder(x,y):=x or y;
(%o7)  oder(x , y) := x   or   y
(%i8) implikation(x,y):= not(x) or y;
(%o8)  implikation(x , y) := not x   or   y
(%i11)  khm(a,b):=implikation(a,b or not(b));
(%o11)  khm(a , b) := implikation(a , b   or   not b)
(%i12)  khm(true,true);
(%o12)  true
(%i13)  khm(true,false);
(%o13)  true
(%i14)  khm(false,true);
(%o14)  true
(%i15)  khm(false,false);
(%o15)  true
(%i16)  "*****************************************************"$
(%i17)  " Diese bekannte Wetterregel ist eine Tautologie      "$
(%i18)  " - das ist auch gut so :-)                           "$
(%i19)  "*****************************************************"$
(%i20)
```

Wenn der Hahn am Mist kräht, ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist

Merke: eine Regel sollte eigentlich immer eine Tautologie sein, oder? :-)

Zur Erinnerung: eine Tautologie ist eine Aussage, die immer wahr ist!

```
(%i1)  a:[true,false];
(%o1)  [ true , false ]
(%i2)  b:[true,false];
(%o2)  [ true , false ]
(%i4)  c:[true,false];
(%o4)  [ true , false ]
(%i5)  "================================================"$
(%i6)  eqv(x,y):=(not x or y) and (x or not y);
(%o6)  eqv(x , y) := (not x  or  y)  and  (x  or  not y)
(%i7)  aussage1(p,m):=eqv(p,not m);
(%o7)  aussage1(p , m) := eqv(p , not m)
(%i8)  "================================================"$
(%i9)  " Paul sagt: Max lügt                            "$
(%i10)  "================================================"$
(%i11)  aussage2(m,o):=eqv(m, not o);
(%o11)  aussage2(m , o) := eqv(m , not o)
(%i12)  "================================================"$
(%i13)  " Max sagt: Otto lügt                            "$
(%i14)  "================================================"$
(%i15)  aussage3(p,m,o):=eqv(o, not p and not m);
(%o15)  aussage3(p , m , o) := eqv(o , not p  and  not m)
(%i16)  "================================================"$
(%i17)  " Otto sagt: beide lügen                         "$
(%i18)  "================================================"$
(%i19)
for p in a do for m in b do for o in c do print (p,m,o,aussage1(p,m) and
aussage2(m,o) and aussage3(p,m,o));
true  true  true  false
true  true  false  false
true  false  true  false
true  false  false  false
false  true  true  false
false  true  false  true
false  false  true  false
false  false  false  false
(%o19)  done
(%i20)  "================================================"$
(%i21)  " Ergebnis:                                      "$
```

```
(%i22) " Paul lügt                                      "$
(%i23) " Max sagt die Wahrheit                          "$
(%i24) " Otto lügt                                      "$
(%i25) "===============================================" $
(%i26)
```

Erstellen einer Wahrheitstafel

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
f	f	w	w	w
f	w	w	w	w
w	f	f	f	w
w	w	w	w	w

Maxima kennt die Negation (not), die Konjunktion (and) und die Disjunktion (or)

Die Lösung mit Maxima besteht daher aus mehreren Schritten:

```
(%i1) imp(x,y):=not(x) or y;
(%o1) imp(x , y) := not x   or   y
(%i2) imp(true,true);
(%o2) true
(%i3) imp(true,false);
(%o3) false
(%i4) imp(false,true);
(%o4) true
(%i5) imp(false,false);
(%o5) true
(%i6) "================================================"$
(%i7) " Benutzerdefinierte Implikation                  "$
(%i8) "================================================"$
```

Implikation

Damit steht die Implikation zur Verfügung!

```
(%i9)  eqv(x,y):=imp(x,y) and imp(y,x);
(%o9)  eqv(x , y) := imp(x , y)  and  imp(y , x)
(%i10) eqv(true,true);
(%o10) true
(%i11) eqv(true,false);
(%o11) false
(%i12) eqv(false,true);
(%o12) false
(%i13) eqv(false,false);
(%o13) true
(%i14) "==============================================="$
(%i15) " Zwei Aussagen sind äquivalent, wenn sie den   "$
(%i16) " gleichen Wahrheitswert haben                  "$
(%i17) "==============================================="$
```

Äquivalenz

Die Äquivalenz wird über die Implikation definiert (es gibt auch andere Möglichkeiten)

```
(%i18) a(x,y):=eqv(imp(x,y),imp(not(y),not(x)));
(%o18) a(x , y) := eqv(imp(x , y) , imp(not y , not x))
(%i20) a(true,true);
(%o20) true
(%i21) a(true,false);
(%o21) true
(%i22) a(false,true);
(%o22) true
(%i23) a(false,false);
(%o23) true
(%i24) "==============================================="$
(%i25) " Das ist eine Tautologie                       "$
(%i26) "==============================================="$
(%i27)
```

das ist die gegebene Formel

Damit ist die eigentliche Aufgabe gelöst!

Die Regel von De Morgan behauptet die Äquivalenz der zwei letzten Spalten:

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	f	f
w	f	w	w	f	f
w	w	f	f	f	f

Wir zeigen das mit Maxima:

```
(%i1)  imp(x,y):=not(x) or y;
(%o1)  imp(x , y) := not x  or  y
(%i9)  eqv(x,y):=imp(x,y) and imp(y,x);
(%o9)  eqv(x , y) := imp(x , y)  and  imp(y , x)
(%i28)  a(x,y):=eqv(not(x and y),not(x) or not(y));
(%o28)  a(x , y) := eqv(not (x  and  y), not x  or  not y)
(%i29)  a(true,true);
(%o29)  true
(%i30)  a(true,false);
(%o30)  true
(%i31)  a(false,true);
(%o31)  true
(%i32)  a(false,false);
(%o32)  true
(%i33)  "================================================"$
(%i34)  " Das ist der Beweis der Regel von De Morgan    "$
(%i35)  "================================================"$
(%i36)
```

```
(%i1) imp(x,y):=not(x) or y;
(%o1) imp(x , y) := not x  or  y
(%i9) eqv(x,y):=imp(x,y) and imp(y,x);
(%o9) eqv(x , y) := imp(x , y)  and  imp(y , x)
(%i36) a(p,r,q):=imp(imp(p,r) and imp(r,q),imp(p,q));
```

Grundlage von Beweisen

```
(%o36) a(p , r , q) := imp(imp(p , r)  and  imp(r , q) , imp(p , q))
(%i37) a(true,true,true);
(%o37) true
(%i38) a(true,true,false);
(%o38) true
(%i39) a(true,false,true);
(%o39) true
(%i40) a(true,false,false);
(%o40) true
(%i41) a(false,true,true);
(%o41) true
(%i42) a(false,true,false);
(%o42) true
(%i43) a(false,false,true);
(%o43) true
(%i44) a(false,false,false);
(%o44) true
```

diese Aussageformel ist immer wahr, und daher eine Tautologie

```
(%i45) "================================================"$
(%i46) " Diese Tautologie ist eine wichtige Grundlage  "$
(%i47) " von mathematischen Beweistechniken            "$
(%i48) "================================================"$
(%i49)
```

Achtung:

bei 2 Aussagen hat die Wahrheitstafel 4 Zeilen

bei 3 Aussagen hat die Wahrheitstafel 8 Zeilen

Die Lösung der gleichen Aufgabe mit Hilfe der Listenverarbeitung und FOR-Schleife

```
(%i1) imp(x,y):=not(x) or y;
(%o1) imp(x , y) := not x  or  y
(%i2) eqv(x,y):=imp(x,y) and imp(y,x);
(%o2) eqv(x , y) := imp(x , y)  and  imp(y , x)
(%i3) a(p,r,q):=imp(imp(p,r) and imp(r,q),imp(p,q));
(%o3) a(p , r , q) := imp(imp(p , r)  and  imp(r , q) , imp(p , q))
(%i4) a:[true,false];
(%o4) [ true , false ]
(%i5) b:[true,false];
(%o5) [ true , false ]
(%i6) c:[true,false];
(%o6) [ true , false ]
(%i7) for p in a do for q in b do for r in c do print (a(p,r,q));
true
true
true
true
true
true
true
true
(%o7) done
(%i8)
```

```
(%i1)  "==================================================="$
(%i2)  " Ungleichungen                                     "$
(%i3)  "==================================================="$
(%i4)  3<4;
(%o4)  3 < 4
(%i5)  %,pred;
(%o5)  true
(%i6)  "==================================================="$
(%i7)  3>4;
(%o7)  3 > 4
(%i8)  %,pred;
(%o8)  false
(%i9)  "==================================================="$
(%i10)  x<x+1;
(%o10)  x < x + 1
(%i11)  %,pred;
(%o11)  true
(%i12)  "==================================================="$
(%i13)  x>x+1;
(%o13)  x > x + 1
(%i14)  %,pred;
(%o14)  false
(%i15)  "==================================================="$
(%i20)  x<x+3;
(%o20)  x < x + 3
(%i21)  %,pred;
(%o21)  true
(%i22)  "==================================================="$
(%i23)  x>x+3;
(%o23)  x > x + 3
(%i24)  %,pred;
(%o24)  false
(%i25)  "==================================================="$
(%i28)
```

```
(%i1) "================================================="$
(%i2) " Wahrheitstafel                                   "$
(%i3) "================================================="$
(%i4) formel(x,y,z):=(x or y) and ( not ( y and (x or z)));
(%o4) formel(x, y, z):=(x or y) and not(y and (x or z))
(%i5) formel(true,true,true);
(%o5) false
(%i6) formel(true,true,false);
(%o6) false
(%i7) formel(true,false,true);
(%o7) true
(%i8) formel(true,false,false);
(%o8) true
(%i9) formel(false,true,true);
(%o9) false
(%i10) formel(false,true,false);
(%o10) true
(%i11) formel(false,false,true);
(%o11) false
(%i12) formel(false,false,false);
(%o12) false
(%i13)
```

```
(%i1) a:[true,false];
(%o1) [ true , false ]
(%i2) b:[true,false];
(%o2) [ true , false ]
(%i3) "==============================================="$
(%i4) for x in a do for y in b do print (x and y);
true
false
false
false
(%o4) done
(%i5) "==============================================="$
(%i6) for x in a do for y in b do print (x or y);
true
true
true
false
(%o6) done
(%i7) "==============================================="$
(%i8) for x in a do for y in b do print (not x or y);
true
false
true
true
(%o8) done
(%i9) "==============================================="$
(%i10)
```

```
(%i1) a:[true,false];
(%o1) [ true , false ]
(%i2) b:[true,false];
(%o2) [ true , false ]
(%i3) for x in a do for y in b do print (x,y,x and y);
true   true   true
true   false   false
false   true   false
false   false   false
(%o3) done
(%i4) "================================================="$
(%i5) " das ist die Konjunktion                          "$
(%i6) "================================================="$
(%i7) for x in a do for y in b do print (x,y,x or y);
true   true   true
true   false   true
false   true   true
false   false   false
(%o7) done
(%i8) "================================================="$
(%i9) " das ist die Disjunktion                          "$
(%i10) "================================================="$
(%i11) for x in a do for y in b do print (x,y,not x or y);
true   true   true
true   false   false
false   true   true
false   false   true
(%o11) done
(%i12) "================================================="$
(%i13) " das ist die Implikation                          "$
(%i14) "================================================="$
(%i15)
for x in a do for y in b do print (x,y,(not x or y) and (x or not y));
true   true   true
true   false   false
false   true   false
false   false   true
(%o15) done
```

```
(%i16) "==================================================="$
(%i17) " das ist die Äquivalenz                          "$
(%i18) "==================================================="$
(%i19)
```

(%i1) A:matrix([true,true], [true,false], [false,true], [false,false]);

(%o1) $\begin{bmatrix} true & true \\ true & false \\ false & true \\ false & false \end{bmatrix}$

(%i2) A[1,1];

(%o2) true

(%i3) A[4,1];

(%o3) false

(%i4) for i:1 thru 4 do display(A[i,1] and A[i,2]); $\left(A_{i,1}\ \text{and}\ A_{i,2}\right)$ = true $\left(A_{i,1}\ \text{and}\ A_{i,2}\right)$ = false $\left(A_{i,1}\ \text{and}\ A_{i,2}\right)$ = false $\left(A_{i,1}\ \text{and}\ A_{i,2}\right)$ = false

(%o4) *done*

(%i5) for i:1 thru 4 do display(A[i,1] or A[i,2]); $\left(A_{i,1}\ \text{or}\ A_{i,2}\right)$ = true $\left(A_{i,1}\ \text{or}\ A_{i,2}\right)$ = true $\left(A_{i,1}\ \text{or}\ A_{i,2}\right)$ = true $\left(A_{i,1}\ \text{or}\ A_{i,2}\right)$ = false

(%o5) *done*

(%i6) for i:1 thru 4 do display(not A[i,1] or A[i,2]);

$\left(\text{not}\ A_{i,1}\ \text{or}\ A_{i,2}\right)$ = true $\left(\text{not}\ A_{i,1}\ \text{or}\ A_{i,2}\right)$ = false $\left(\text{not}\ A_{i,1}\ \text{or}\ A_{i,2}\right)$ = true $\left(\text{not}\ A_{i,1}\ \text{or}\ A_{i,2}\right)$ = true

(%o6) *done*

(%i7)

Die Funktion factor() ist häufig notwendig

Grundlagen: einfache Bruchrechnung

Kommentare werden unter Anführungszeichen geschrieben, das $-Zeichen verhindert das nochmalige Anschreiben des Kommentars

```
(%i1)  "=================================================="$
(%i2)  " Addition und Subtraktion von Brüchen             "$
(%i3)  "=================================================="$
(%i4)  a/b+c/d;
```

(%o4) $\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$

```
(%i6)  factor(%);
```

% bedeutet das letzte Zwischenergebnis

(%o6) $\frac{a\,d+b\,c}{b\,d}$

```
(%i7)  "=================================================="$
(%i8)  a/b-c/d;
```

(%o8) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$

```
(%i9)  factor(%);
```

(%o9) $\frac{a\,d-b\,c}{b\,d}$

```
(%i10)  "=================================================="$
(%i11)  2/3+1/4+1/3;
```

(%o11) $\frac{5}{4}$

```
(%i12)  2/3+1/4+1/2;
```

(%o12) $\frac{17}{12}$

```
(%i13)  (4+1/2)-1/9+2/3;
```

(%o13) $\frac{91}{18}$

```
(%i14)  (40+1/6)-4/5;
```

(%o14) $\frac{1181}{30}$

```
(%i15)  "=================================================="$
(%i16)  " Multiplikation von Brüchen                       "$
(%i17)  "=================================================="$
(%i18)  (a/b)*(c/d);
```

(%o18) $\frac{a\,c}{b\,d}$

```
(%i19)  "=================================================="$
(%i20)  " Divsion von Brüchen                              "$
(%i21)  "=================================================="$
(%i22)  (a/b)/(c/d);
```

(%o22) $\frac{a\,d}{b\,c}$

```
(%i23) "=================================================="$
(%i24) " Beispiele                                        "$
(%i25) "=================================================="$
(%i26) 1/3*1/5;
```
(%o26) $\frac{1}{15}$

```
(%i27) 2/7*3/8;
```
(%o27) $\frac{3}{28}$

```
(%i28) 1/6*5/7*11/12;
```
(%o28) $\frac{55}{504}$

```
(%i29) (-2/3)*4/5*(-1/8);
```
(%o29) $\frac{1}{15}$

```
(%i30) 2/9*(-(2+1/4))*(3+1/7);
```
(%o30) $-\frac{11}{7}$

```
(%i33) (4/(1/7))/(2/5);
(%o33) 70
(%i34) 4/((1/7)/(2/5));
```
(%o34) $\frac{56}{5}$

```
(%i35) (2/3)/5;
```
(%o35) $\frac{2}{15}$

```
(%i36) 2/(3/5);
```
(%o36) $\frac{10}{3}$

```
(%i37)
```

```
(%i1)  "===============================================" $
(%i2)  " Prozentrechnung                               " $
(%i3)  "===============================================" $
(%i4)  B:100;
(%o4)  100
(%i5)  p:4;                       von 100       vom reinen Betrag
(%o5)  4
(%i6)  P:B*p/100;
(%o6)  4
(%i7)  "===============================================" $
(%i8)  " reiner Betrag                                 " $
(%i9)  "===============================================" $
(%i10) B:104;
(%o10) 104
(%i11) p:4;                       auf 100
(%o11) 4                                        vom vermehrten Betrag
(%i12) P:B*p/(100+p);
(%o12) 4
(%i13) "===============================================" $
(%i14) " vermehrter Betrag                             " $
(%i15) "===============================================" $
(%i16) B:96;
(%o16) 96
(%i17) p:4;                       in 100        vom verminderten Betrag
(%o17) 4
(%i18) P:B*p/(100-p);
(%o18) 4
(%i19) "===============================================" $
(%i20) " verminderter Betrag                           " $
(%i21) "===============================================" $
(%i22)
```

```
(%i1)  A:[a,b];
(%o1)  [ a , b ]
(%i2)  B:[1,2,3];
(%o2)  [ 1 , 2 , 3 ]
(%i3)  for x in A do for y in B do print (x,y);
a  1
a  2
a  3
b  1
b  2
b  3
(%o3)  done
(%i4)  "================================================"$
(%i5)  " Das ist A X B                                  "$
(%i6)  "================================================"$
(%i7)  for y in B do for x in A do print (y,x);
1  a
1  b
2  a
2  b
3  a
3  b
(%o7)  done
(%i8)  "================================================"$
(%i9)  " Das ist B X A                                  "$
(%i10)  "================================================"$
(%i11)
```

die Verwendung der FOR-Schleife ist häufig sinnvoll (immer, wenn man in der Mathematik Listen oder Tabellen erstellt).

(%i1) "==="$

(%i2) " Wertetabellen   "$

(%i3) "==="$

(%i4) x:[-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5];

(%o4) [- 5 , - 4 , - 3 , - 2 , - 1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5]

(%i5) "==="$

(%i6) " x ist die Definitionsmenge   "$

(%i7) "==="$

(%i8) y:x+1;

(%o8) [- 4 , - 3 , - 2 , - 1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6]

(%i9) y:x^2;

(%o9) [25 , 16 , 9 , 4 , 1 , 0 , 1 , 4 , 9 , 16 , 25]

(%i10) y:x^3;

(%o10) [- 125 , - 64 , - 27 , - 8 , - 1 , 0 , 1 , 8 , 27 , 64 , 125]

(%i12) y:x^2-8*x+15;

(%o12) [80 , 63 , 48 , 35 , 24 , 15 , 8 , 3 , 0 , - 1 , 0]

(%i13) y:x^2+2*x+1;

(%o13) [16 , 9 , 4 , 1 , 0 , 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36]

(%i14) y:exp(x);

(%o14) $[\%e^{-5}, \%e^{-4}, \%e^{-3}, \%e^{-2}, \%e^{-1}, 1, \%e, \%e^{2}, \%e^{3}, \%e^{4}, \%e^{5}]$

(%i16) "==="$

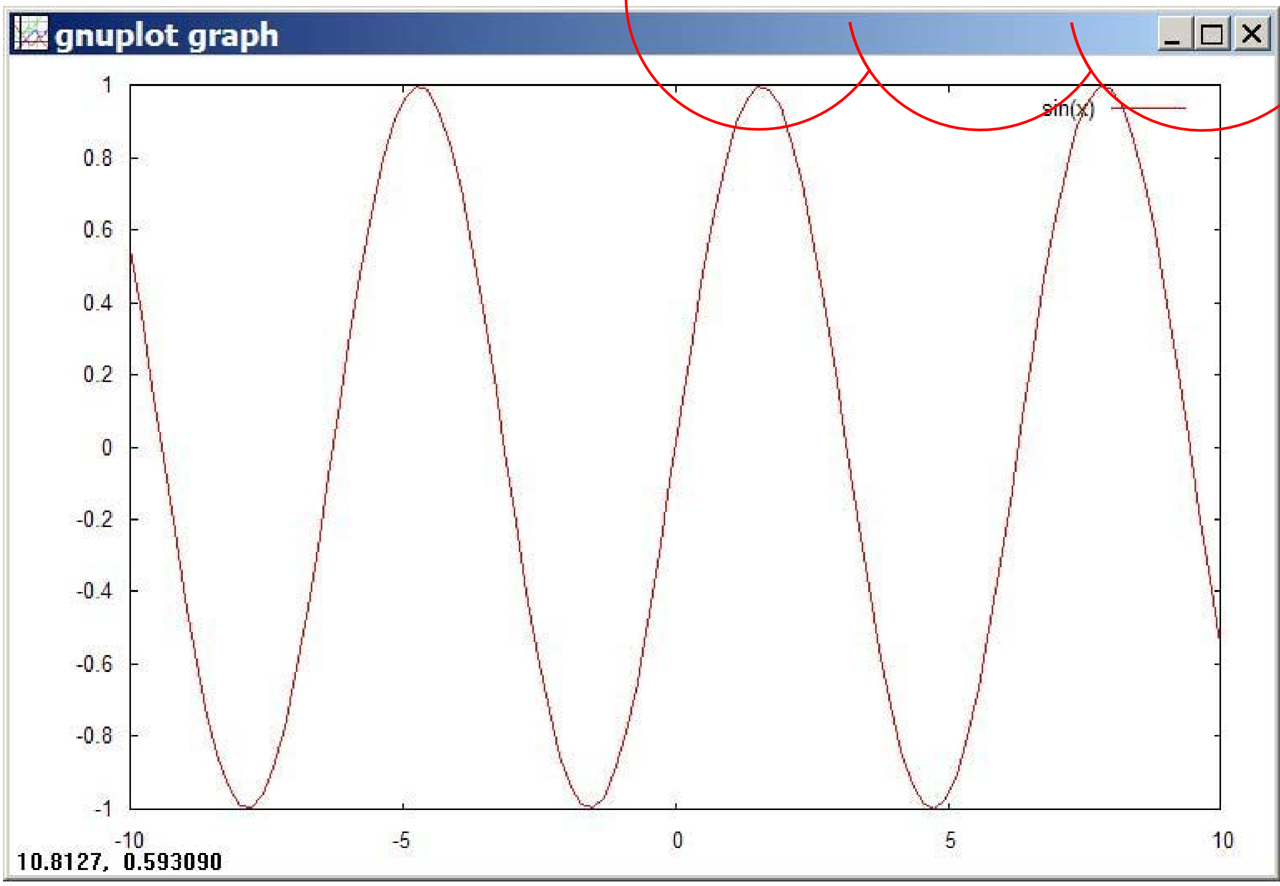
(%i17) " y ist die Wertemenge   "$

(%i18) "==="$

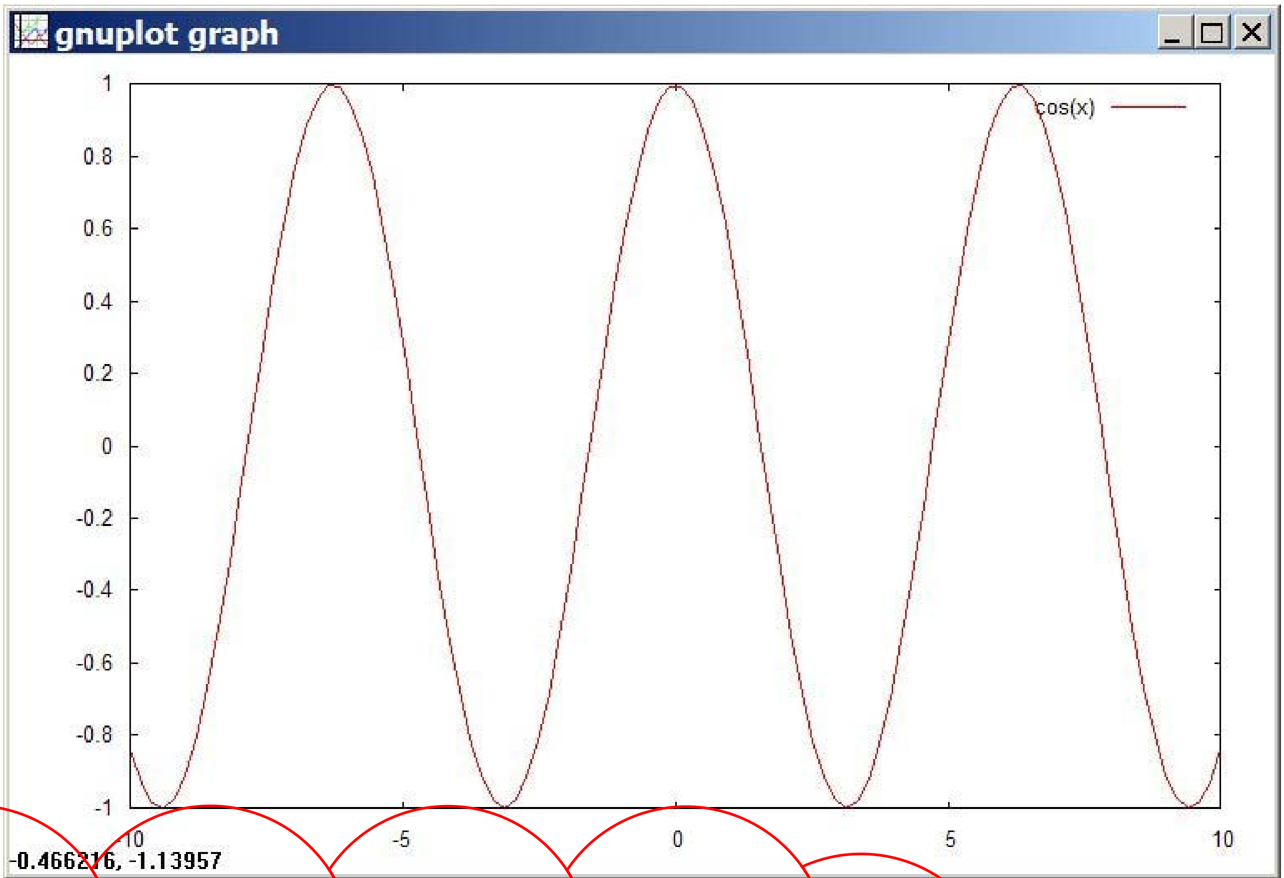
(%i19)

Diese Methode ist nicht auf trigonometrische Funktionen anwendbar

Hinweis: für die grafischen Darstellungen verwende ich lieber das Programm GEOGEBRA, aber auch GNU-PLOT hat interessante Möglichkeiten!

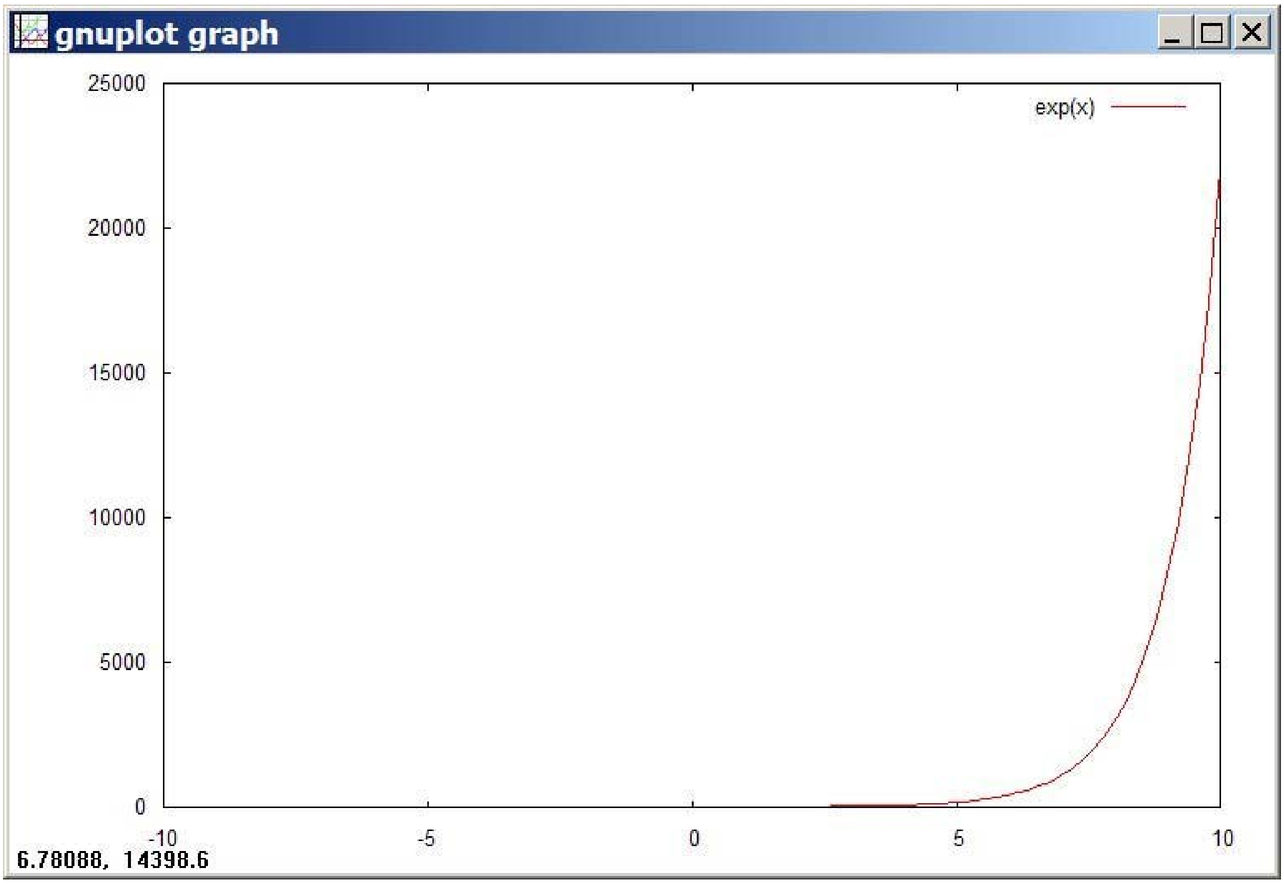


Das ist die Sinus-Funktion

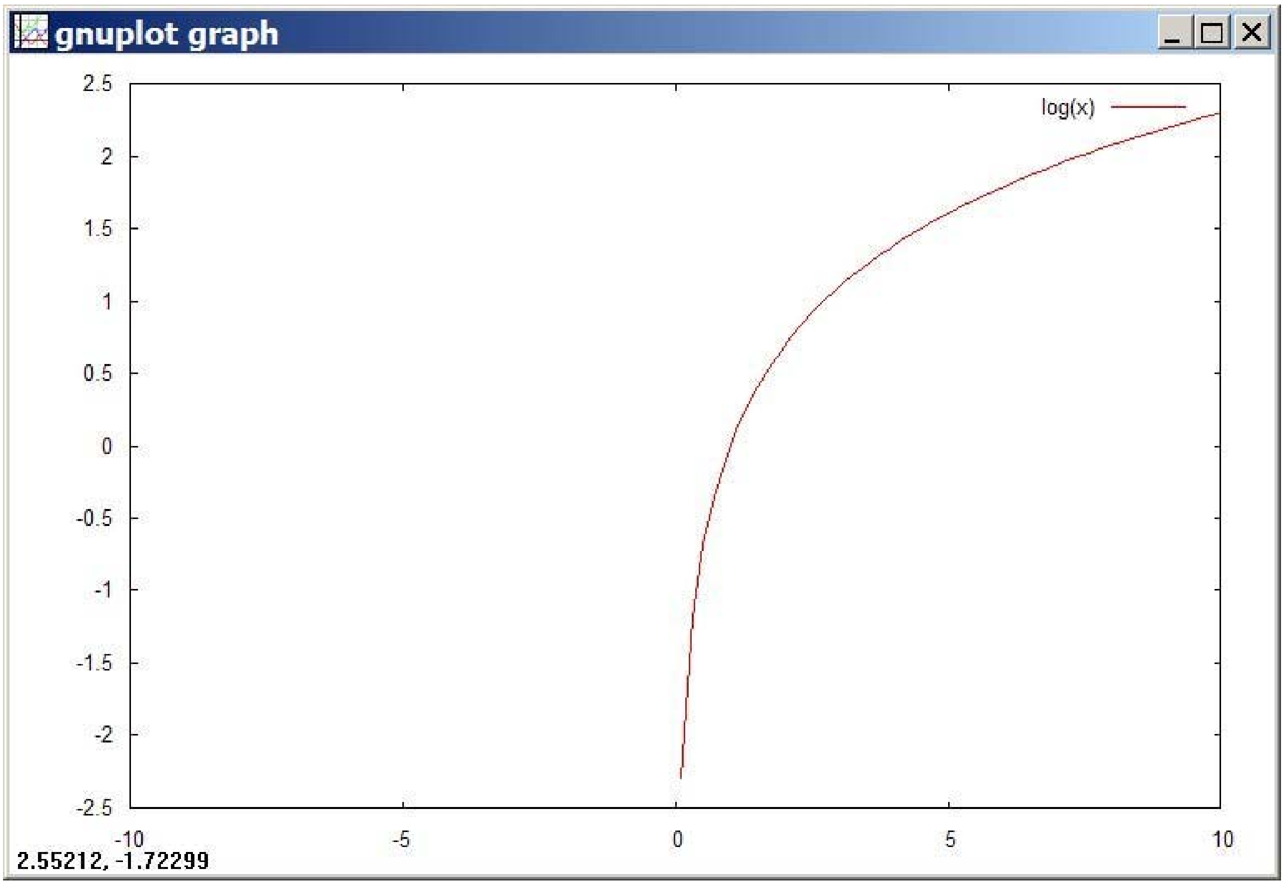


Das ist die Cosinus-Funktion

Anmerkung: das Programm GNUPLOT ist in Maxima auch aufrufbar

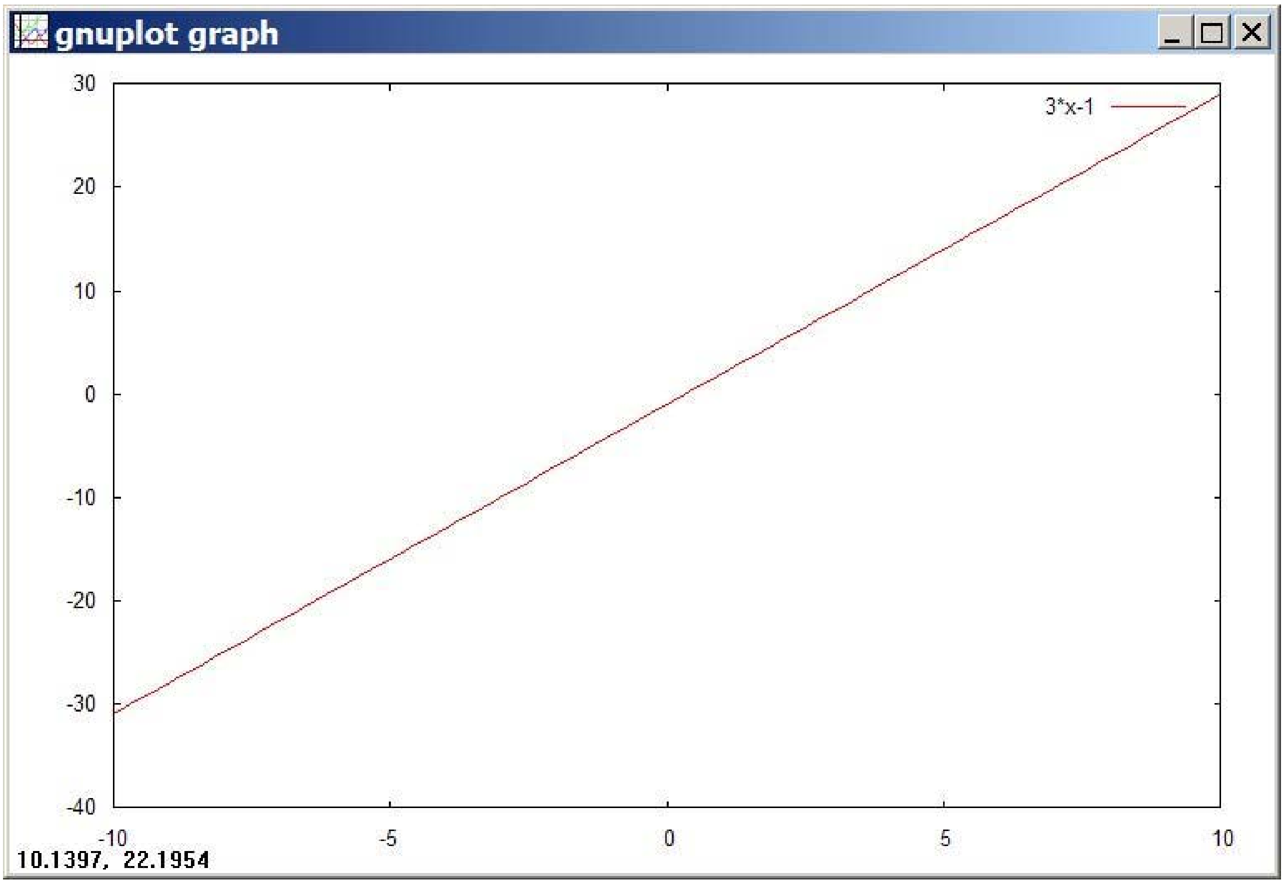


Das ist die Exponentialfunktion

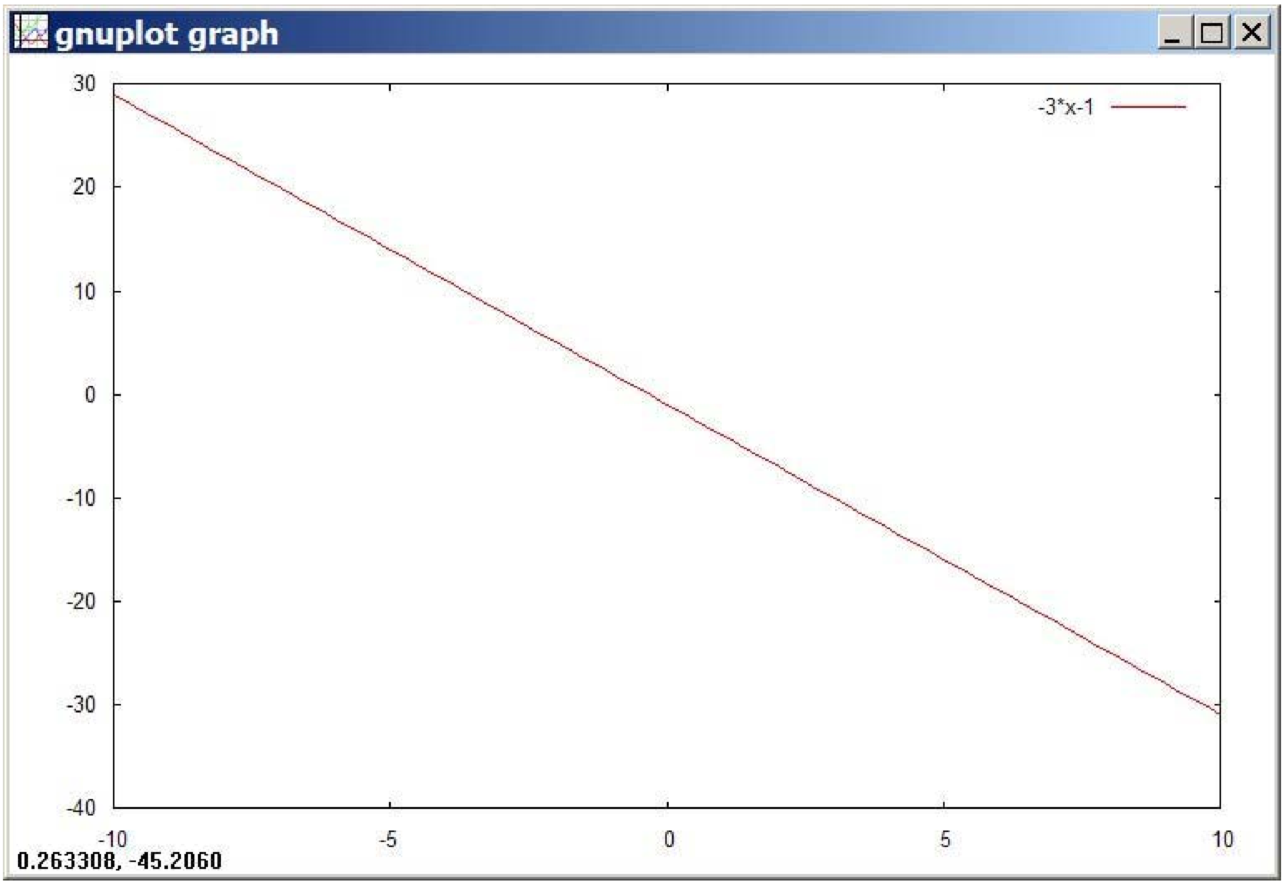


Das ist die Logarithmusfunktion

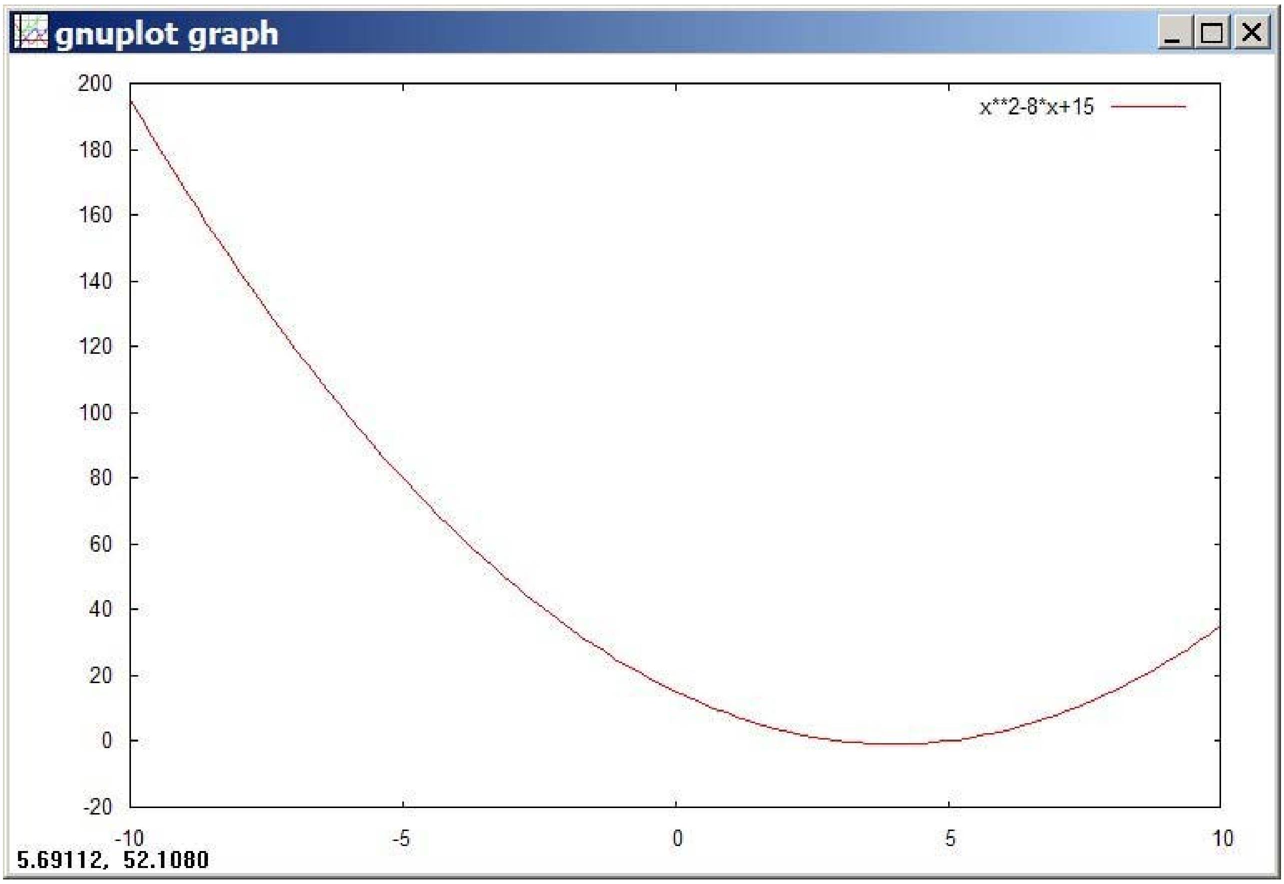
`Anmerkung Weilharter: für die Grafiken verwende ich häufiger Geogebra`



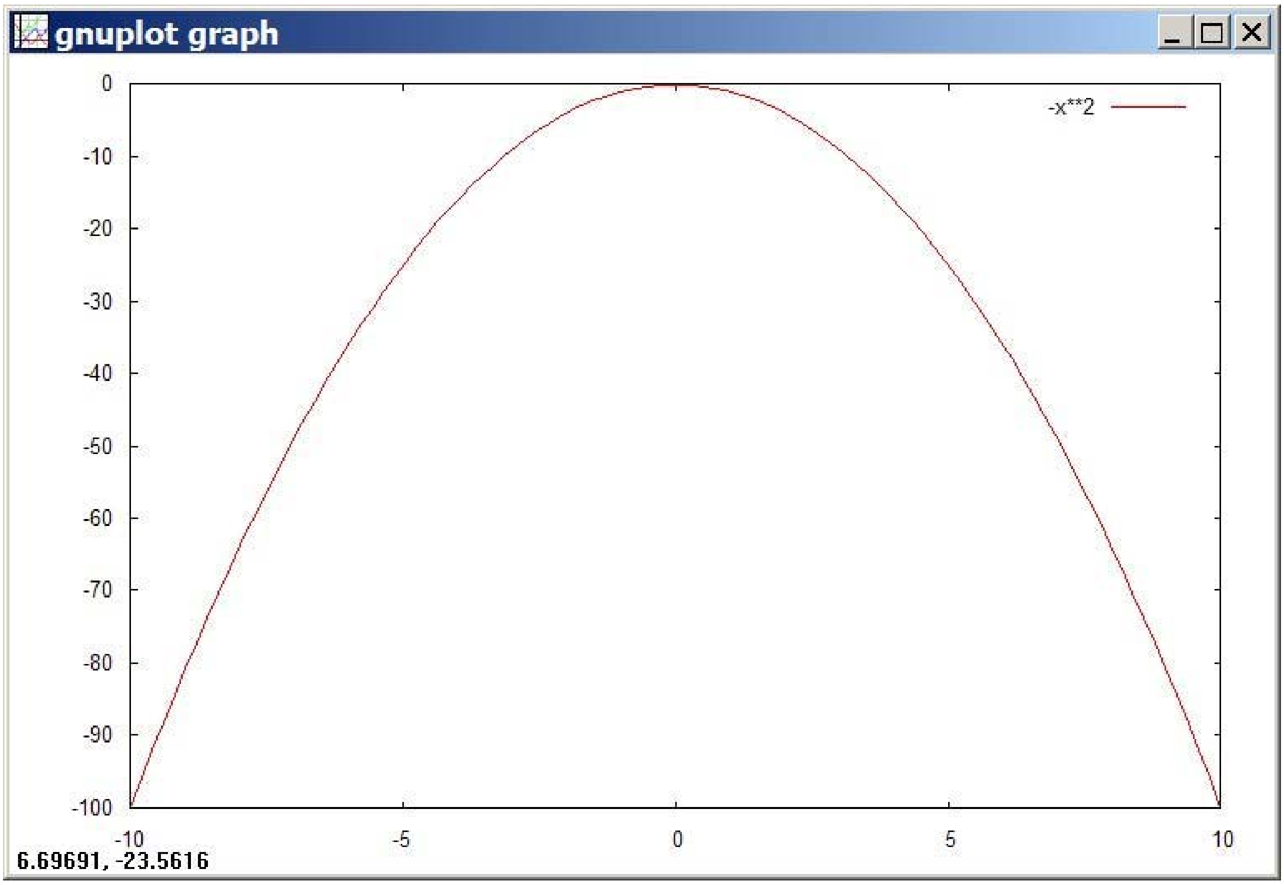
Das ist eine steigende lineare Funktion



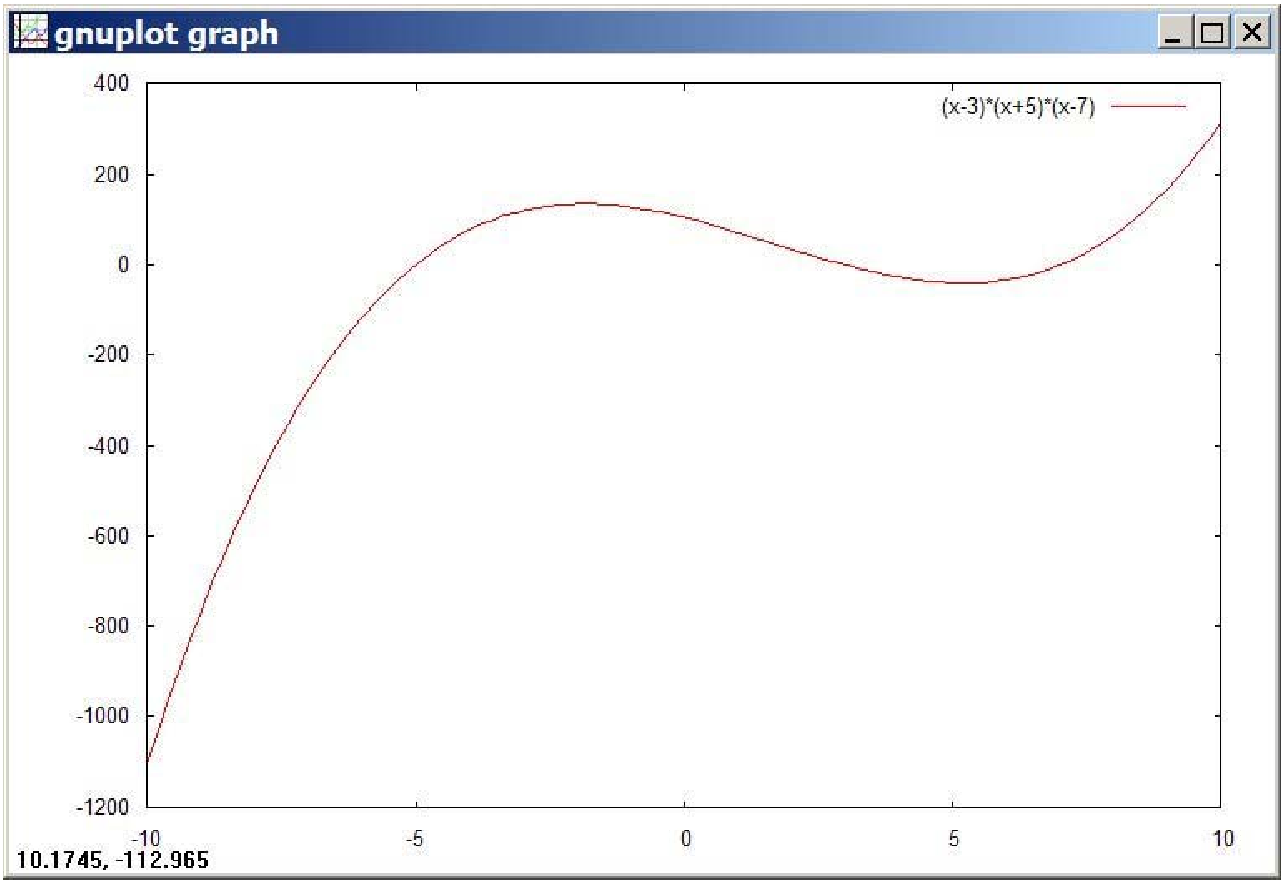
Das ist eine fallende lineare Funktion



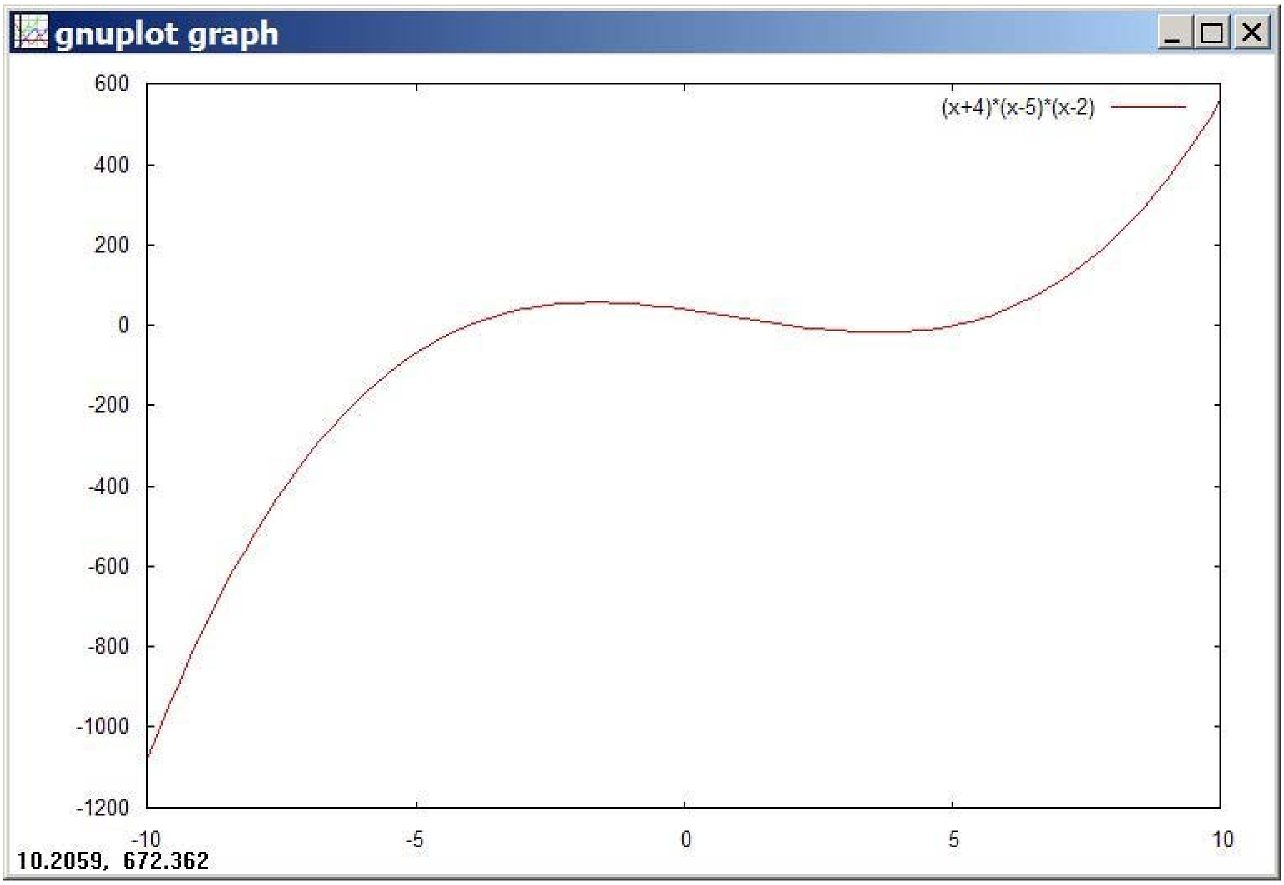
Das ist eine Parabel



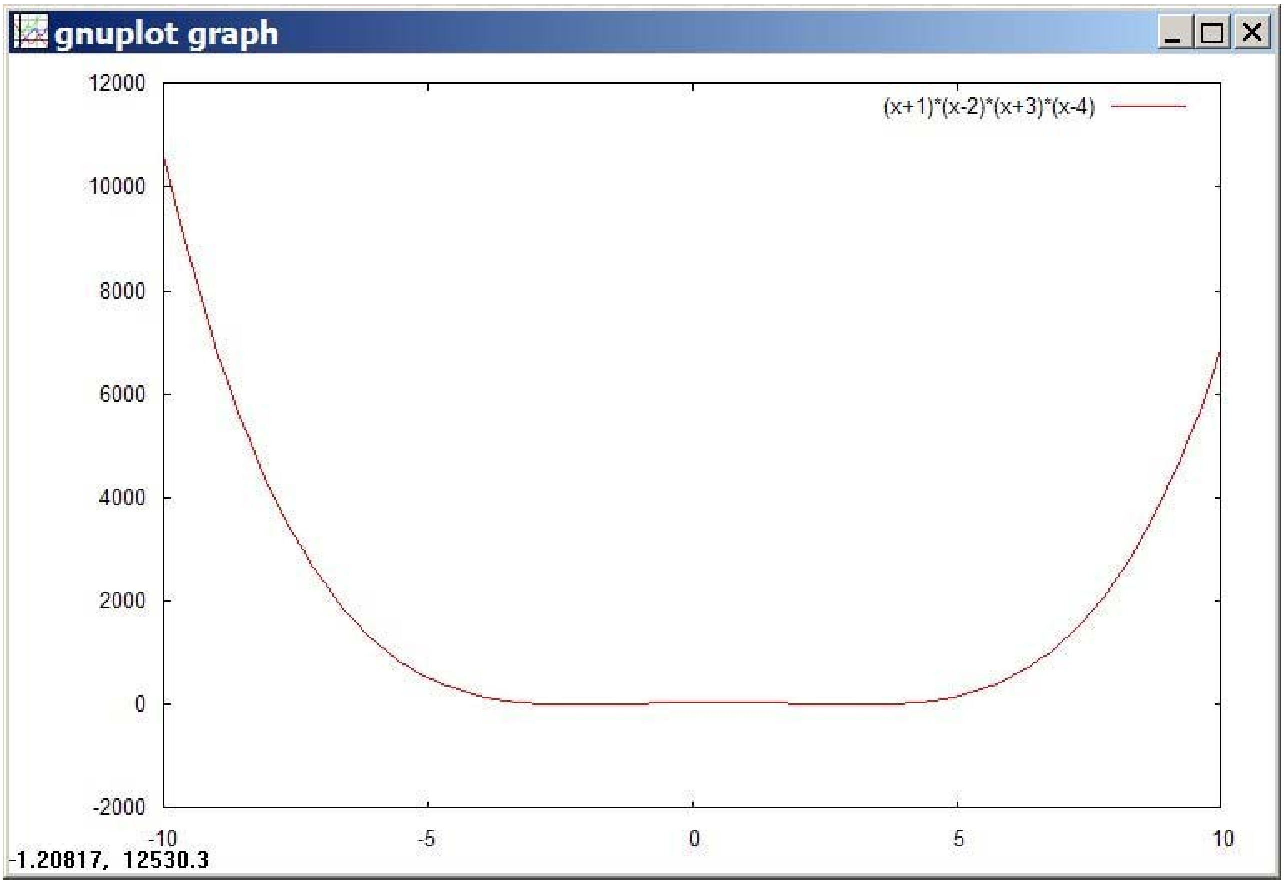
Eine Parabel, die nach unten offen ist



Eine Funktion dritten Grades



Eine weitere Funktion dritten Grades



Das ist eine Funktion vierten Grades

```
(%i1)  "================================================"$
(%i2)  " proportionale Kosten                            "$
(%i3)  "================================================"$
(%i4)  k:2;                                                   Wertzuweisung
(%o4)  2
(%i5)  "================================================"$
(%i6)  " produzierte Menge                               "$
(%i7)  "================================================"$
(%i8)  x:1000;
(%o8)  1000
(%i9)  "================================================"$
(%i10)  " variable Kosten                                "$
(%i11)  "================================================"$
                                                              K[v] ist keine indizierte
(%i12)  K[v]:k*x;                                             Variable, es wird nur v
(%o12)  2000                                                  tiefgestellt
(%i13)  "================================================"$
(%i14)  " Fixkosten                                      "$
(%i15)  "================================================"$
(%i16)  F:10000;
(%o16)  10000
(%i17)  "================================================"$
(%i18)  " Gesamtkosten                                   "$
(%i19)  "================================================"$
(%i20)  K:K[v]+F;
(%o20)  12000
(%i21)  "================================================"$
(%i22)  " Lineare Kostenfunktion                         "$
(%i23)  "================================================"$
(%i30)
```

(%i1) "==="$

(%i2) " Lineare Kostenfunktion "$

(%i3) "==="$

(%i4) g:K=k*x+F;

(%o4) $K = F + k\ x$

(%i5) solve(g,K);

(%o5) $[\ K = F + k\ x\ ]$

(%i6) solve(g,F);

(%o6) $[\ F = K - k\ x\ ]$

(%i7) solve(g,k);

(%o7) $[\ k = \frac{K - F}{x}\ ]$

(%i8) solve(g,x);

(%o8) $[\ x = \frac{K - F}{k}\ ]$

für Formelumformungen kann man solve() verwenden

dazu gibt es viele Anwendungsfälle

(%i12) "==="$

(%i13) " Kosten, Erlös und Gewinn "$

(%i14) "==="$

(%i15) K:k*x+F;

(%o15) $F + k\ x$

(%i16) U:p*x;

(%o16) $p\ x$

(%i17) G:U-K;

(%o17) $- F + p\ x - k\ x$

(%i18) solve(G=0,x);

(%o18) $[\ x = \frac{F}{p - k}\ ]$

(%i19) "==="$

(%i20) " Break-Even-Point "$

(%i21) "==="$

(%i22)

Problemlösungen können SEHR übersichtlich dargestellt werden


```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Die Dame, die Eurostücke ausgibt                    "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) " Eine Dame hat eine Anzahl Eurostücke in der Tasche "$
(%i5) " und sonst kein Geld.                                "$
(%i6) " Diese Anzahl der Eurostücke sei x                   "$
(%i7) " 1.) Die Hälfte des Geldes gibt sie für einen Hut   "$
(%i8) "     und einen Euro spendet sie einem Bettler        "$
(%i9) "     vor dem Geschäft.                               "$
(%i10) "****************************************************"$
(%i11) g1:y=x/2-1;
```

$$y = \frac{x}{2} - 1 \quad (\%o11)$$

mit WX-Maxima auch mehrzeilig

Es ist sehr zweckmäßig, Objekte, wie Gleichungen, mit einem Bezeichner zu versehen. g1 steht stellvertretend für die gesamte Gleichung.

```
(%i12) "****************************************************"$
(%i13) " Es verbleiben y Geldstücke.                        "$
(%i14) " 2.) Die Hälfte der verbleibenden Summe verbraucht "$
(%i15) "     für ihr Mittagessen im Restaurant und gibt    "$
(%i16) "     noch 2 Euro Trinkgeld.                         "$
(%i17) "****************************************************"$
(%i18) g2:z=y/2-2;
```

$$z = \frac{y}{2} - 2 \quad (\%o18)$$

```
(%i19) "****************************************************"$
(%i20) " Nun verbleiben z Geldstücke.                       "$
(%i21) " 3.) Die Hälfte von dem, was sie nun noch hat, gibt"$
(%i22) "     sie für ein Buch aus, und ehe sie nach Hause  "$
(%i23) "     geht, nimmt sie noch einige Drinks in einer   "$
(%i24) "     Bar zu sich. Diese kosten drei Euro.          "$
(%i25) "****************************************************"$
(%i26) g3:w=z/2-3;
```

$$w = \frac{z}{2} - 3 \quad (\%o26)$$

```
(%i27) "****************************************************"$
(%i28) " w = Anzahl der verbliebenen Geldstücke.            "$
(%i30) " 4.) Nun hat sie noch einen Euro.                   "$
(%i31) "****************************************************"$
(%i32) g4:w=1;
```

$$w = 1 \quad (\%o32)$$

```
(%i33) "****************************************************"$
```

```
(%i34) " Wie viele Eurostücke hatte sie anfangs, wenn       "$
(%i35) " sie niemals Geld gewechselt hat?                   "$
(%i36) "****************************************************"$
(%i37) solve([g1,g2,g3,g4],[x,y,z,w]);
(%o37)  [ [ x = 42 , y = 20 , z = 8 , w = 1 ] ]
(%i38) "****************************************************"$
(%i39) " Sie hatte 42 Euro.                                  "$
(%i40) " Quellenachweis:                                     "$
(%i41) " Johann Weilharter, Spaß mit Algorithmen, S. 15ff   "$
(%i42) " Braunschweig: Vieweg 1984                          "$
(%i43) "****************************************************"$
(%i44)
```

Lösung eines linearen Gleichungssystems mit solve

Das Buch "Spaß mit Algorithmen" war ein Lehrbuch zur Programmierung mit der Programmiersprache BASIC.

B ... Beginners
A ... All Purpose
S ... Symbolic
I ... Instruction
C... Code

Anmerkung Weilharter: für die Behandlung von linearen Gleichungssystemen ist Maxima naturgemäß perfekt geeignet

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Matrizenmethode                                  "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) g1:y=x/2-1;
```

Mit der Oberfläche WXMAXIMA ist auch die Matrizenrechnung von Maxima gut verwendbar

(%o4) $y = \frac{x}{2} - 1$

```
(%i5) g2:z=y/2-2;
```

(%o5) $z = \frac{y}{2} - 2$

```
(%i6) g3:w=z/2-3;
```

(%o6) $w = \frac{z}{2} - 3$

```
(%i7) g4:w=1;
```

(%o7) $w = 1$

```
(%i8) "**************************************************"$
(%i9) A:coefmatrix([g1,g2,g3,g4],[x,y,z,w]);
```

Bestimmung der Koeffizientenmatrix

(%o9) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Die Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems kann auf einfache Art und Weise ermittelt werden.

```
(%i10) b:matrix([-1], [-2], [-3], [1]);
```

(%o10) $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Mit invert(A) kann man die inverse Matrix von A bestimmen und dann durch Matrizenmultiplikation die Lösung des Gleichungssystems ermitteln.

```
(%i11) x:invert(A).b;
```

(%o11) $\begin{bmatrix} 42 \\ 20 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

Anmerkung: A.B ist die Matrizenmultiplikation (im Gegensatz zur normalen Multiplikation A*B)

```
(%i12)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Ableitungen in der Physik                        "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) Durchschnittsgeschwindigkeit:v(t):=(s[2]-s[1])/(t[2]-t[1]);
```

(%o4) $v(t) := \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ Differenzenquotient

```
(%i5) Durchschnittsbeschleunigung:a(t):=(v[2]-v[1])/(t[2]-t[1]);
```

(%o5) $a(t) := \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ Differenzenquotient

```
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) kill(all);
(%o0) DONE
(%i1) Momentangeschwindigkeit:v(t):='diff(s(t),t);
```

(%o1) $v(t) := \dfrac{d}{d\, t} s(t)$ Differenzialquotient

```
(%i2) Momentanbeschleunigung:a(t):='diff(v(t),t);
```

(%o2) $a(t) := \dfrac{d}{d\, t} v(t)$ Differenzialquotient

```
(%i3) "**************************************************"$
(%i4)
```

Anmerkungen: die Physik ist ein wichtiges Anwendungsgebiet der Differentialrechnung

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " DER FREIE FALL                                      "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) s(t):=g/2*t^2;
```

(%o4) $s(t) := \frac{g}{2} t^2$

s = Weg
g = Erdbeschleunigung
t = Zeit

```
(%i5) "*****************************************************"$
(%i6) " Weg-Zeit-Gesetz                                     "$
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) v(t):=diff(s(t),t);
```

(%o8) $v(t) := \mathrm{DIFF}(s(t), t)$

```
(%i9) v(t);
```

(%o9) $g\ t$

die erste Ableitung von s ist die Geschwindigkeit

```
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) " Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz                        "$
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) a(t):=diff(v(t),t);
```

(%o13) $a(t) := \mathrm{DIFF}(v(t), t)$

```
(%i14) a(t);
```

(%o14) g

die erste Ableitung der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung oder

die zweite Ableitung von s ist die Beschleunigung

```
(%i15) "*****************************************************"$
(%i16) " Die Beschleunigung ist die Erdbeschleunigung        "$
(%i17) "*****************************************************"$
(%i18)
```

Anmerkung: mit Hilfe der Integralrechnung, kann man ausgehend von der Erdbeschleunigung zunächst die Geschwindigkeit und dann das Weg-Zeit-Gesetz ermitteln

(%i1) `f(x):=a*x^2+b*x+c;`

(%o1) $f(x) := a\,x^2 + b\,x + c$

(%i2) `ab:diff(f(x),x);`

die Ableitung einer quadratischen Funktion ist eine lineare Funktion

(%o2) $2\,a\,x + b$

(%i3) `"*****************************************************"$`

(%i4) `f(x):=(x+a)^2;`

(%o4) $f(x) := (x + a)^2$

(%i5) `ab:diff(f(x),x);`

(%o5) $2\,(x + a)$

(%i6) `"*****************************************************"$`

(%i7) `f(x):=(x+a)^3;`

(%o7) $f(x) := (x + a)^3$

wenn man eine Funktion dritten Grades ableitet, erhält man eine quadratische Funktion

(%i8) `ab:diff(f(x),x);`

(%o8) $3\,(x + a)^2$

(%i9) `"*****************************************************"$`

(%i10) `w(t):=a*t-1/2*b*t^2;`

(%o10) $w(t) := a\,t - \frac{1}{2}\,b\,t^2$ Weg-Zeit-Gesetz

(%i11) `ab:diff(w(t),t);`

(%o11) $a - b\,t$ Geschwindigkeit

(%i12) `"*****************************************************"$`

(%i13) `f(x):=(197-34*x^2)*(7+22*x-83*x^3);`

(%o13) $f(x) := (197 - 34\,x^2)\,(7 + 22\,x + (-83)\,x^3)$

(%i14) `ab:diff(f(x),x);` Ableitung nach der Prouktregel

(%o14) $(22 - 249\,x^2)\,(197 - 34\,x^2) - 68\,x\,(-83\,x^3 + 22\,x + 7)$

(%i15) `"*****************************************************"$`

(%i16) `f(x):=(2*x+3)/(3*x+2);`

(%o16) $f(x) := \frac{2\,x + 3}{3\,x + 2}$

(%i17) `ab:diff(f(x),x);`

(%o17) $\frac{2}{3\,x + 2} - \frac{3\,(2\,x + 3)}{(3\,x + 2)^2}$ dafür braucht man normalerweise die Quotientenregel

(%i18) `"*****************************************************"$`

(%i19) `f(x):=(1+x+2*x^2+3*x^3)/(1+x+2*x^2);`

(%o19) $f(x) := \frac{1 + x + 2\,x^2 + 3\,x^3}{1 + x + 2\,x^2}$

(%i20) `ab:diff(f(x),x);`

```
(%i1) "*********************************************"$
(%i2) " Ableitungen                                 "$
(%i3) "*********************************************"$
(%i4) f(x):=(5*x^3-4*x)*(x^2+5*x);
```

(%o4) $f(x) := (5\ x^3 - 4\ x)(x^2 + 5\ x)$

```
(%i5) ab:diff(f(x),x);
```

(%o5) $(2\ x + 5)(5\ x^3 - 4\ x) + (x^2 + 5\ x)(15\ x^2 - 4)$

```
(%i6) expand(ab);
```

(%o6) $25\ x^4 + 100\ x^3 - 12\ x^2 - 40\ x$

```
(%i7) "*********************************************"$
(%i8) " Probe Produktregel                          "$
(%i9) "*********************************************"$
(%i10) u(x):=(5*x^3-4*x);
```

(%o10) $u(x) := 5\ x^3 - 4\ x$

```
(%i11) v(x):=(x^2+5*x);
```

(%o11) $v(x) := x^2 + 5\ x$

```
(%i12) abu:diff(u(x),x);
```

(%o12) $15\ x^2 - 4$

```
(%i14) abv:diff(v(x),x);
```

(%o14) $2\ x + 5$

```
(%i15) ab:abu*v(x)+u(x)*abv;
```

(%o15) $(2\ x + 5)(5\ x^3 - 4\ x) + (x^2 + 5\ x)(15\ x^2 - 4)$

```
(%i16) expand(ab);
```

(%o16) $25\ x^4 + 100\ x^3 - 12\ x^2 - 40\ x$

so wird herkömmlich gerechnet

```
(%i17) "*********************************************"$
(%i21) ab:diff(u(x),x)*v(x)+u(x)*diff(v(x),x);
```

(%o21) $(2\ x + 5)(5\ x^3 - 4\ x) + (x^2 + 5\ x)(15\ x^2 - 4)$

```
(%i22) expand(ab);
```

(%o22) $25\ x^4 + 100\ x^3 - 12\ x^2 - 40\ x$

direkte Anwendung der Produktregel

```
(%i23) "*********************************************"$
(%i24)
```

(%o20) $$\frac{9\,x^2+4\,x+1}{2\,x^2+x+1}-\frac{(4\,x+1)\,(3\,x^3+2\,x^2+x+1)}{(2\,x^2+x+1)^2}$$

(%i21) `"****************************************************"$`

(%i22) `f(x):=(a*x+b)/(c*x+d);`

(%o22) $$f(x):=\frac{a\,x+b}{c\,x+d}$$

(%i23) `ab:diff(f(x),x);`

(%o23) $$\frac{a}{c\,x+d}-\frac{c\,(a\,x+b)}{(c\,x+d)^2}$$

(%i24) `"****************************************************"$`

(%i25) `f(x):=(x^n+a)/(x^-n+b);`

(%o25) $$f(x):=\frac{x^n+a}{x^{-n}+b}$$

(%i26) `ab:diff(f(x),x);`

(%o26) $$\frac{n\,x^{-n-1}\,(x^n+a)}{\left(\frac{1}{x^n}+b\right)^2}+\frac{n\,x^{n-1}}{\frac{1}{x^n}+b}$$

(%i27) `"****************************************************"$`

(%i28)

Grafik (Ableitungen)

Gegeben ist eine Funktion f(x) =

Beispiel 1

$$25\,x^4 + 100\,x^3 - 12\,x^2 - 40\,x$$

Beispiel 2

$$x^3 - 9\,x^2 - 22\,x + 120$$

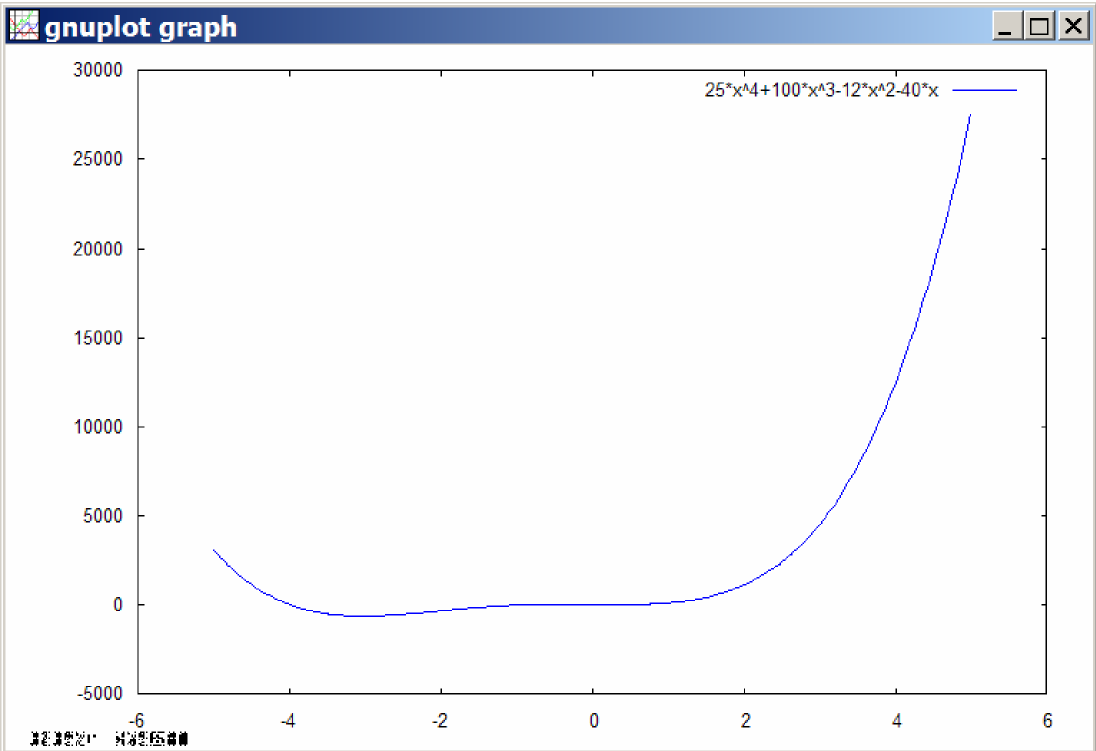
Beispiel 3

$$x^4 - 2\,x^3 - 13\,x^2 + 14\,x + 24$$

Zur Erinnerung: für grafische Darstellungen verwende ich wesentlich lieber Geogebra

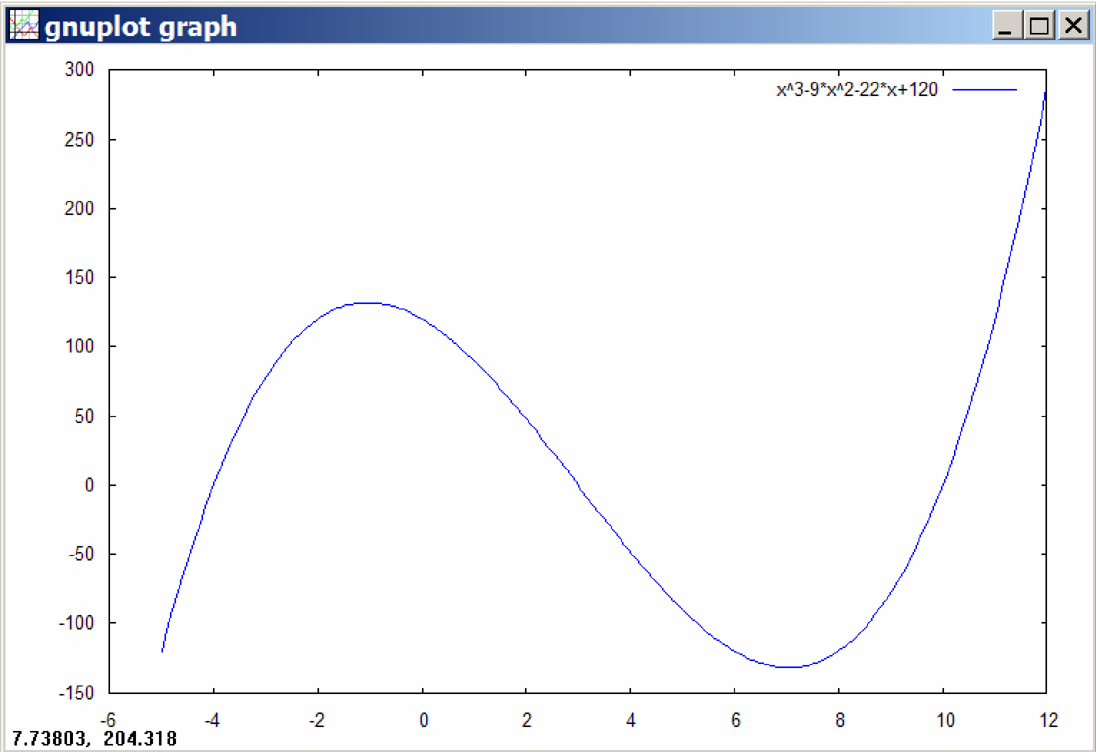
Grafik der Funktion

Beispiel 1



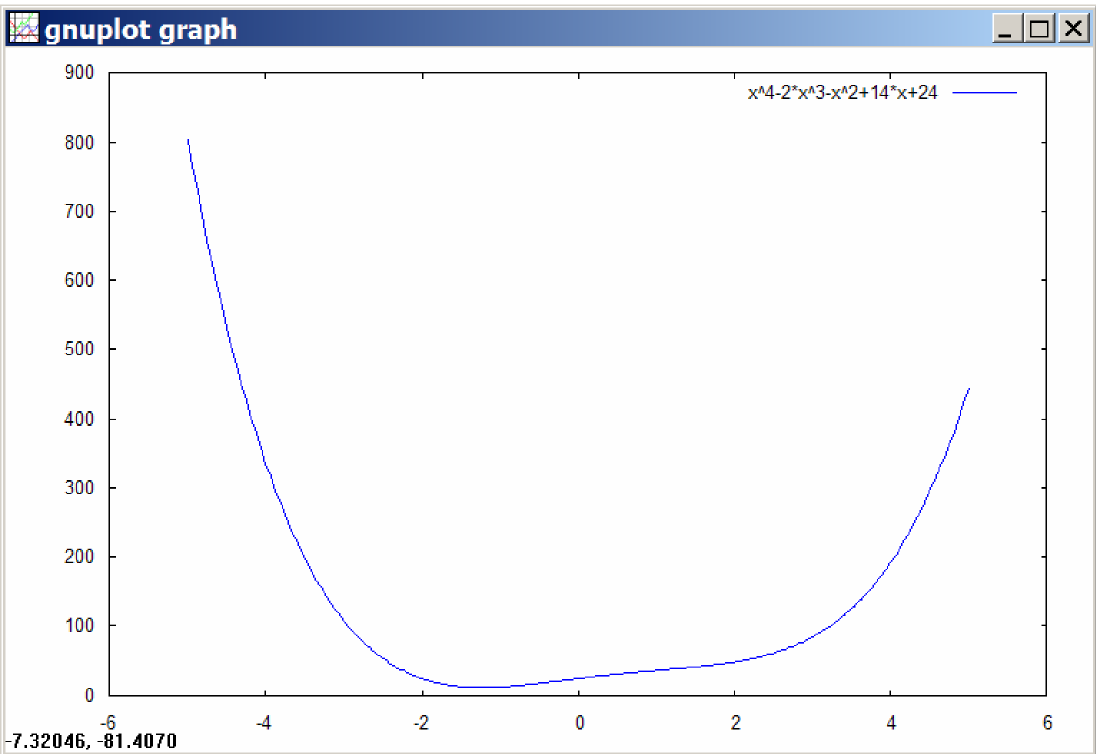
man muss die unterschiedliche Skalierung beachten

Beispiel 2



das ist eine typische Funktion dritten Grades

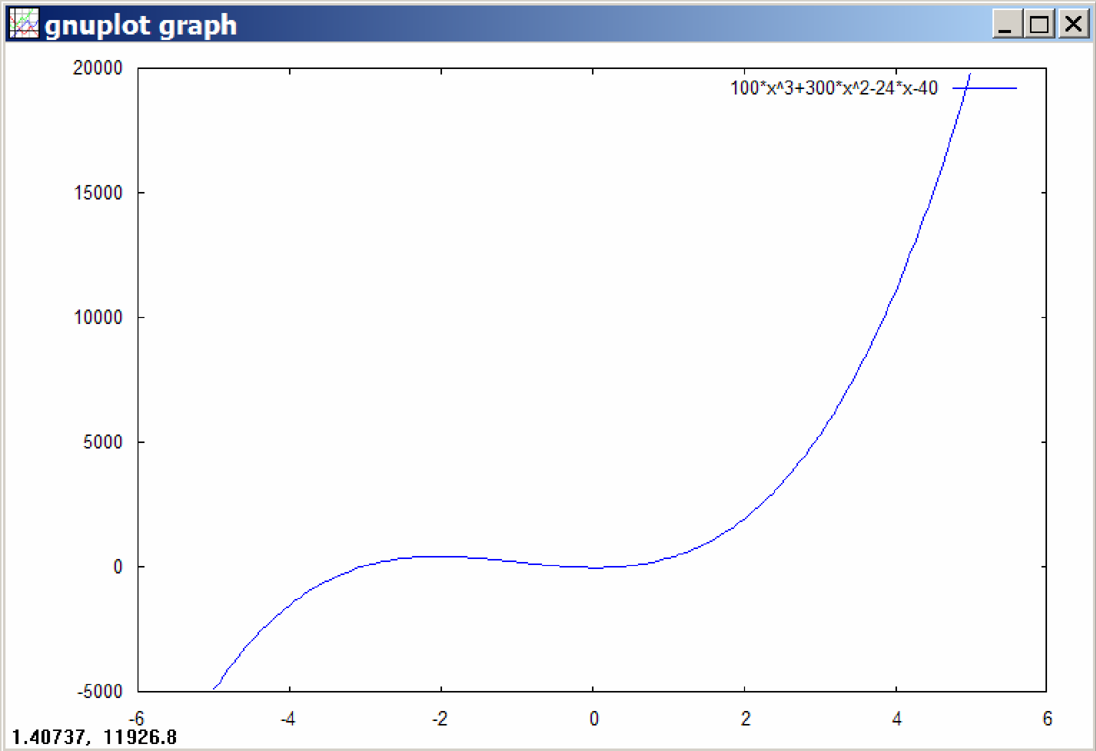
Beispiel 3



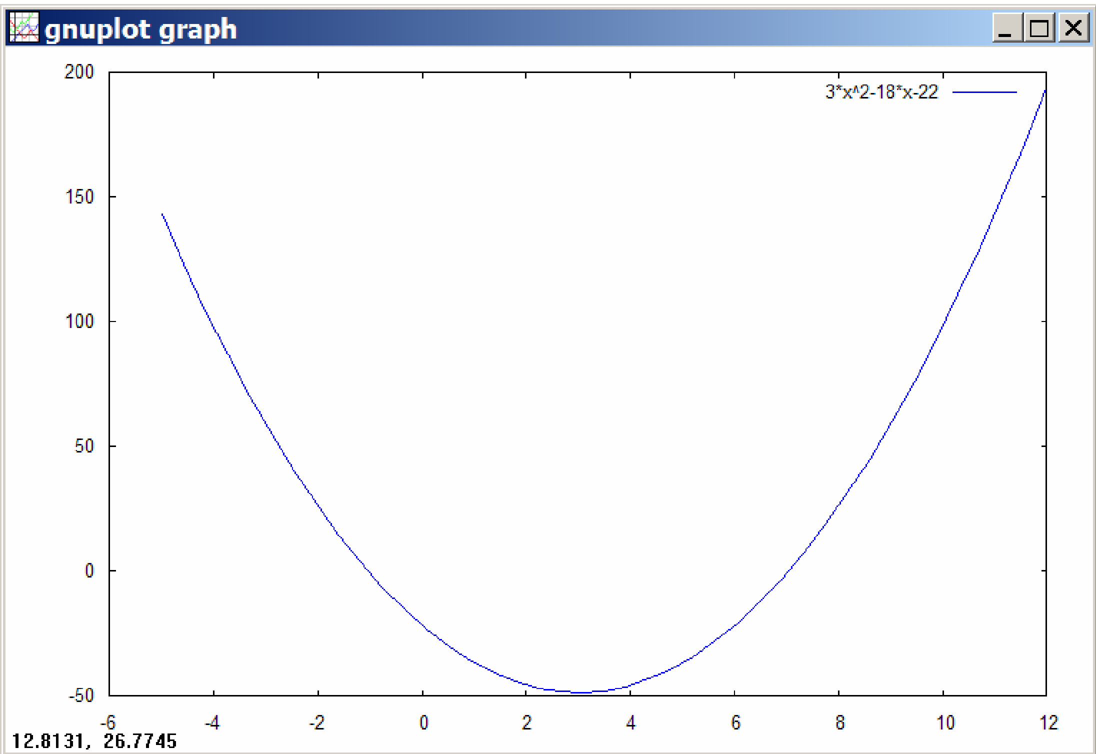
Funktion vierten Grades

Grafik der ersten Ableitung

Beispiel 1

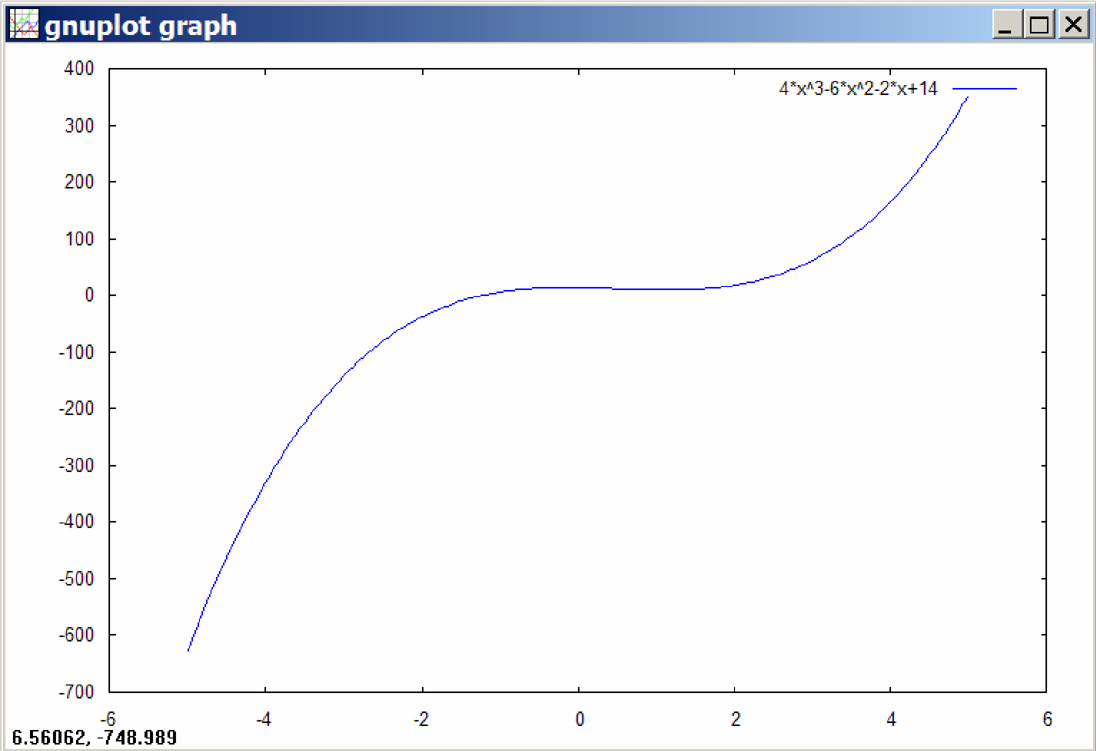


Beispiel 2



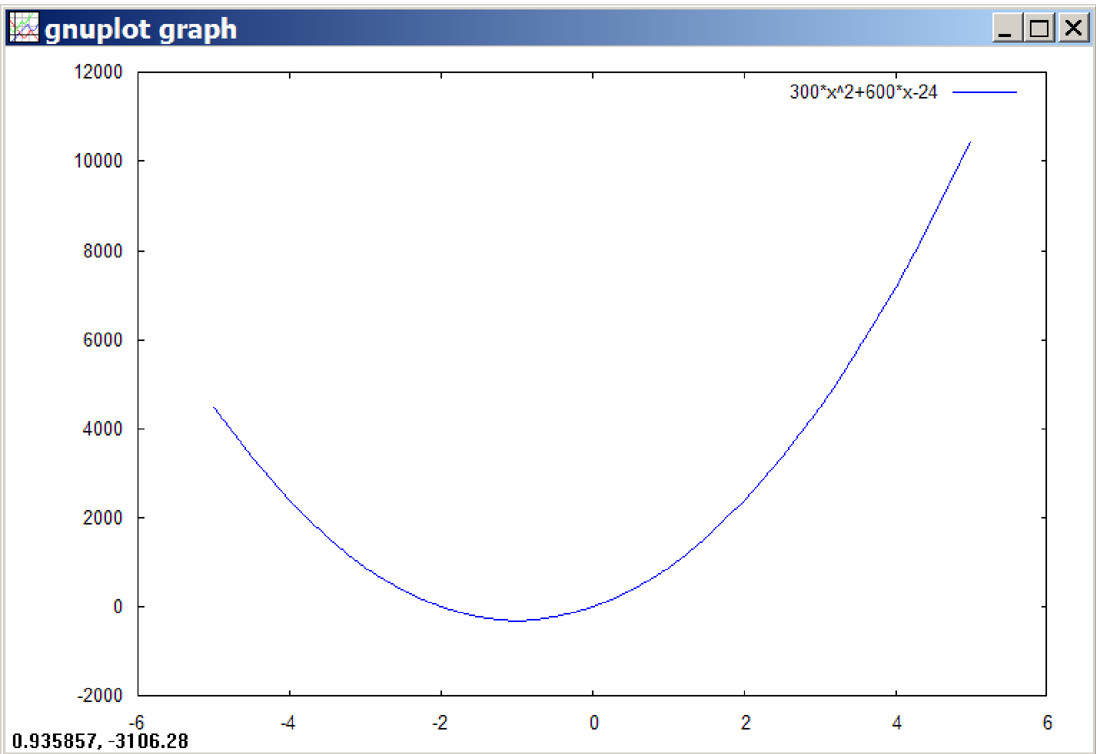
das Schaubild einer quadratischen Funktion = Parabel

Beispiel 3

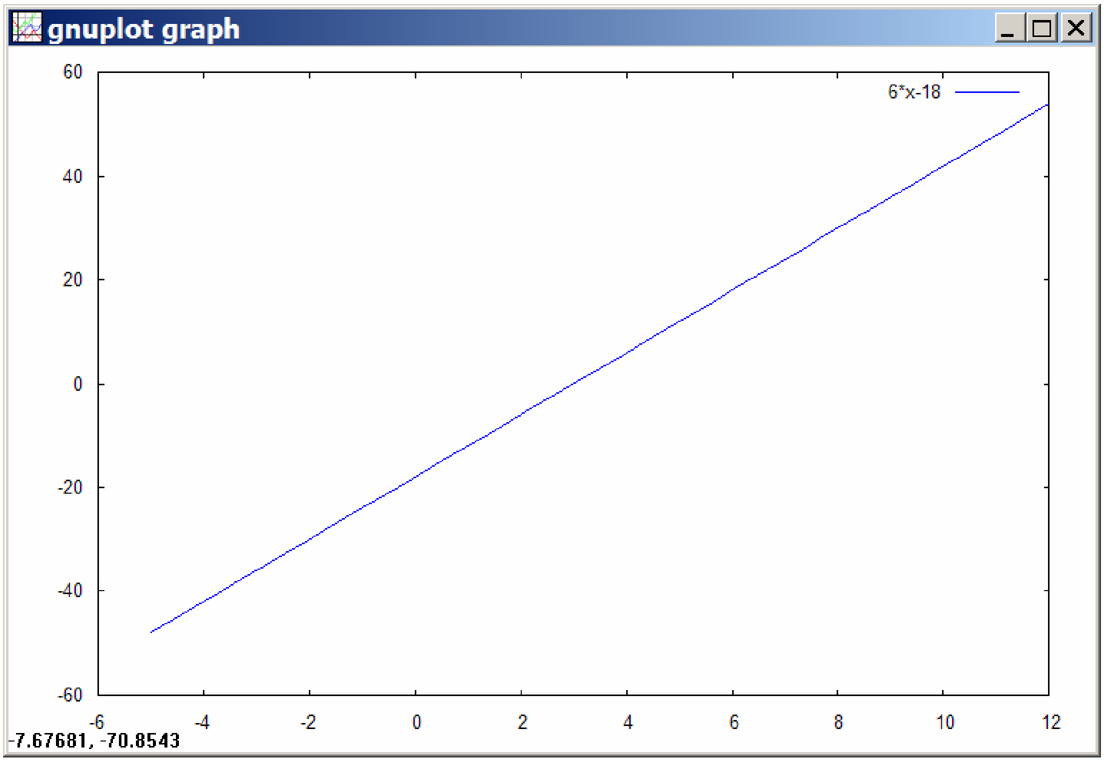


Grafik der zweiten Ableitung

Beispiel 1

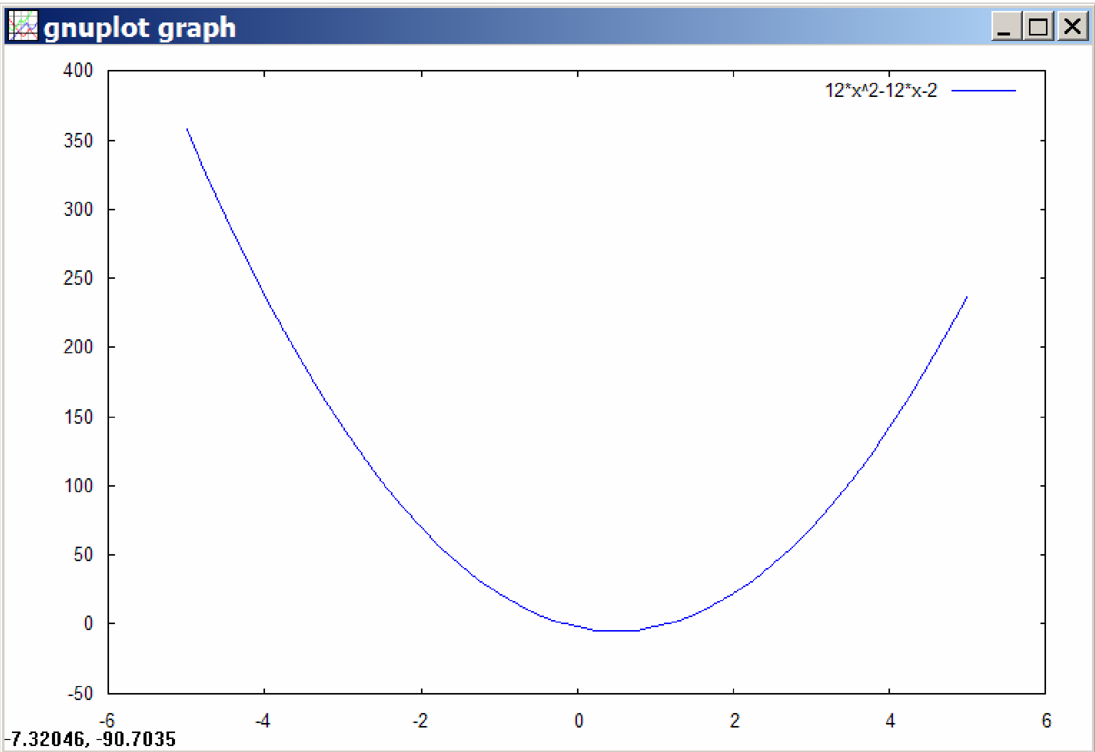


Beispiel 2



das ist eine
lineare Funktion
= Gerade

Beispiel 3



(%i1) "**"$

(%i4) f(x):=x^13;

(%o4) $f(x) := x^{13}$

man findet die Ableitung einer Potenz, in dem man die Hochzahl um 1 vermindert und mit der alten Hochzahl multipliziert

(%i5) ab:diff(f(x),x);

(%o5) $13\ x^{12}$

(%i6) "**"$

(%i7) f(x):=x^(-3/2);

(%o7) $f(x) := x^{-\frac{3}{2}}$

(%i8) ab:diff(f(x),x);

(%o8) $-\frac{3}{2\ x^{5/2}}$

(%i9) "**"$

(%i10) f(x):=x^(2*a);

(%o10) $f(x) := x^{2\ a}$

(%i11) ab:diff(f(x),x);

(%o11) $2\ a\ x^{2\ a - 1}$

(%i12) "**"$

(%i13) u(t):=t^2.4;

(%o13) $u(t) := t^{2.3999999999999999}$

Das ist ein bekannter Fehler der verwendeten Version von WXMAXIMA (die überflüssige und unmotivierte Anzeige von vielen Dezimalstellen)

(%i14) ab:diff(u(t),t);

(%o14) $2.3999999999999999\ t^{1.3999999999999999}$

(%i15) "**"$

(%i16) z(u):=u^(1/3);

(%o16) $z(u) := u^{1/3}$

(%i18) ab:diff(z(u),u);

(%o18) $\frac{1}{3\ u^{2/3}}$

(%i19) "**"$

(%i20) f(x):=(x^(-5))^(1/3);

(%o20) $f(x) := \left(x^{-5}\right)^{1/3}$

(%i21) ab:diff(f(x),x);

(%o21) $-\frac{5}{3\ x^{8/3}}$

(%i22) "**"$

(%i23) u(x):=(1/x^8)^(1/5);

(%o23) $u(x) := \left(\frac{1}{x^8}\right)^{1/5}$

(%i24) `ab:diff(u(x),x);`

(%o24) $$-\frac{8}{5\,x^{13/5}}$$

(%i25) `"*****************************************************"$`

(%i26) `f(x):=2*x^a;`

(%o26) $f(x) := 2\,x^a$

(%i27) `ab:diff(f(x),x);`

(%o27) $2\,a\,x^{a-1}$

(%i28) `"*****************************************************"$`

(%i29) `f(x):=(x^3)^(1/q);`

(%o29) $f(x) := \left(x^3\right)^{1/q}$

(%i30) `ab:diff(f(x),x);`

(%o30) $$\frac{3\,x^{3/q-1}}{q}$$

(%i31) `"*****************************************************"$`

(%i32) `f(x):=(1/x^m)^(1/n);`

(%o32) $f(x) := \left(\frac{1}{x^m}\right)^{1/n}$

(%i33) `ab:diff(f(x),x);`

(%o33) $$-\frac{m}{n\,x\,\left(x^m\right)^{1/n}}$$

(%i34) `"*****************************************************"$`

(%i35)

(%i1) f(x):=a*x^3+6;

(%o1) $f(x) := a\ x^3 + 6$

(%i2) ab:diff(f(x),x);

(%o2) $3\ a\ x^2$

(%i3) "**"$

(%i4) f(x):=13*x^(3/2)-c;

(%o4) $f(x) := 13\ x^{3/2} - c$

(%i5) ab:diff(f(x),x);

(%o5) $\frac{39\sqrt{x}}{2}$

(%i6) "**"$

(%i7) f(x):=12*x^(1/2)+c^(1/2);

(%o7) $f(x) := 12\ x^{1/2} + c^{1/2}$

(%i8) ab:diff(f(x),x);

(%o8) $\frac{6}{\sqrt{x}}$

(%i9) "**"$

(%i10) f(x):=c^(1/2)*x^(1/2);

(%o10) $f(x) := c^{1/2}\ x^{1/2}$

(%i11) ab:diff(f(x),x);

(%o11) $\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{x}}$

(%i12) "**"$

(%i13) u(x):=(a*x^n-1)/c;

(%o13) $u(x) := \frac{a\ x^n - 1}{c}$

(%i14) ab:diff(u(x),x);

(%o14) $\frac{a\ n\ x^{n-1}}{c}$

(%i15) "**"$

(%i18) f(t):=1.18*t^2+22.4;

(%o18) $f(t) := 1.179999999999999\ t^2 + 22.39999999999999$

(%i19) ab:diff(f(t),t);

(%o19) $2.359999999999999\ t$

(%i20) "**"$

(%i23) l(t):=l[0]*(1+0.000012*t);

(%o23) $l(t) := l_0 \left(1 + 1.2\ 10^{-5}\ t\right)$

(%i24) ab:diff(l(t),t);

(%o24) $1.2\ 10^{-5}\ l_0$

(%i25) "**"$

(%i26)

Ableitungen haben viele Anwendungen:

* in Physik und Technik
* in der Wirtschaft

```
(%i1) u(x):=x^5;
```
(%o1) $u(x) := x^5$
```
(%i2) v(x):=log(x);
```
(%o2) $v(x) := log(x)$
```
(%i3) f(x):=u(x)*v(x);
```
(%o3) $f(x) := u(x)\ v(x)$
```
(%i4) f(x);
```
(%o4) $x^5\ log(x)$
```
(%i5) ab:diff(f(x),x);
```
(%o5) $5\ x^4\ log(x) + x^4$
```
(%i6) factor(ab);
```
(%o6) $x^4\ (5\ log(x) + 1)$
```
(%i7) "=================================================="$
(%i8) ab:diff(u(x),x)*v(x)+u(x)*diff(v(x),x);
```
(%o8) $5\ x^4\ log(x) + x^4$
```
(%i9) expand(ab);
```
(%o9) $5\ x^4\ log(x) + x^4$
```
(%i10) "=================================================="$
(%i11) " Ein weiteres Beispiel                            "$
(%i12) "=================================================="$
(%i13) u(x):=exp(x);
```
(%o13) $u(x) := exp(x)$
```
(%i14) v(x):=cos(x);
```
(%o14) $v(x) := cos(x)$
```
(%i15) f(x):=u(x)*v(x);
```
(%o15) $f(x) := u(x)\ v(x)$
```
(%i16) f(x);
```
(%o16) $\%e^x\ cos(x)$
```
(%i17) ab:diff(f(x),x);
```
(%o17) $\%e^x\ cos(x) - \%e^x\ sin(x)$
```
(%i18) factor(ab);
```
(%o18) $- \%e^x\ (sin(x) - cos(x))$
```
(%i19) "=================================================="$
(%i20) ab:diff(u(x),x)*v(x)+u(x)*diff(v(x),x);
```
zur Probe die direkte Anwendung der Produktregel

(%o20) $\%e^x\ cos(x) - \%e^x\ sin(x)$
```
(%i21) factor(ab);
```

(%o21) $-\%e^{x}\left(\sin(x)-\cos(x)\right)$

```
(%i22) "==================================================="$
(%i23) " Und weitere Beispiele (ohne Probe)                "$
(%i24) "==================================================="$
(%i25) f(x):=4*sin(x)*tan(x);
```

(%o25) $f(x):=4\sin(x)\tan(x)$

```
(%i26) ab:diff(f(x),x);
```

(%o26) $4\cos(x)\tan(x)+4\sec(x)^{2}\sin(x)$

```
(%i27) "==================================================="$
(%i28) f(x):=(cos(x)-sin(x))*exp(x);
```

(%o28) $f(x):=\left(\cos(x)-\sin(x)\right)\exp(x)$

```
(%i29) ab:diff(f(x),x);
```

(%o29) $\%e^{x}\left(\cos(x)-\sin(x)\right)+\%e^{x}\left(-\sin(x)-\cos(x)\right)$

```
(%i30) "==================================================="$
(%i31) f(x):=5*(x^2-1)*(2*x+1)*sin(x);
```

(%o31) $f(x):=5\left(x^{2}-1\right)\left(2\,x+1\right)\sin(x)$

```
(%i32) ab:diff(f(x),x);
```

(%o32) $10\left(x^{2}-1\right)\sin(x)+10\,x\left(2\,x+1\right)\sin(x)+5\left(2\,x+1\right)\left(x^{2}-1\right)\cos(x)$

```
(%i33) "==================================================="$
(%i34) ab,x=%pi;
```

(%o34) $-5\left(2\,\%pi+1\right)\left(\%pi^{2}-1\right)$

```
(%i35) %,numer;
```

(%o35) -322.994862272547

```
(%i36) "==================================================="$
(%i37)
```

(%i1) `f(x):=u(x)/v(x);`

(%o1) $f(x):=\frac{u(x)}{v(x)}$

(%i2) `ab:diff(f(x),x);`

(%o2) $\frac{\frac{d}{d\,x}\,u(x)}{v(x)}-\frac{u(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,v(x)\right)}{v(x)^2}$

(%i3) `factor(ab);`

(%o3) $-\frac{u(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,v(x)\right)-v(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,u(x)\right)}{v(x)^2}$

Ermittlung der Quotientenregel

(%i4) `"================================================="$`

(%i5) `" das ist die Quotientenregel                      "$`

(%i6) `"================================================="$`

(%i10) `f(x):=x^2/(1-x^2);`

(%o10) $f(x):=\frac{x^2}{1-x^2}$

(%i11) `ab:diff(f(x),x);`

(%o11) $\frac{2\,x}{1-x^2}+\frac{2\,x^3}{\left(1-x^2\right)^2}$

(%i12) `factor(ab);`

(%o12) $\frac{2\,x}{(x-1)^2\,(x+1)^2}$

(%i13) `expand(%);`

(%o13) $\frac{2\,x}{x^4-2\,x^2+1}$

(%i14) `"================================================="$`

(%i15) `u(x):=x^2;`

(%o15) $u(x):=x^2$

(%i16) `v(x):=1-x^2;`

(%o16) $v(x):=1-x^2$

(%i17) `f(x):=u(x)/v(x);`

(%o17) $f(x):=\frac{u(x)}{v(x)}$

(%i18) `ab:diff(f(x),x);`

(%o18) $\frac{2\,x}{1-x^2}+\frac{2\,x^3}{\left(1-x^2\right)^2}$

(%i19) `"================================================="$`

(%i20) `ab:(diff(u(x),x)*v(x)-u(x)*diff(v(x),x))/v(x)^2;`

(%o20) $$\frac{2\ x^3+2\ x\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

(%i21) `expand(ab);`

(%o21) $$\frac{2\ x}{x^4-2\ x^2+1}$$

(%i22) `expand(%o18);`

(%o22) $$\frac{2\ x^3}{x^4-2\ x^2+1}+\frac{2\ x}{1-x^2}$$

(%i23) `factor(%);`

(%o23) $$\frac{2\ x}{\left(x-1\right)^2\ \left(x+1\right)^2}$$

(%i24) `expand(%);`

(%o24) $$\frac{2\ x}{x^4-2\ x^2+1}$$

(%i25) `"==================================================="$`

(%i26) `" Weitere Beispiele                                 "$`

(%i27) `"==================================================="$`

(%i28) `f(x):=cos(x)/x^2;`

(%o28) $$f\left(x\right):=\frac{\cos\left(x\right)}{x^2}$$

(%i29) `ab:diff(f(x),x);`

(%o29) $$-\frac{\sin\left(x\right)}{x^2}-\frac{2\ \cos\left(x\right)}{x^3}$$

(%i30) `ab,x=%pi;`

(%o30) $$\frac{2}{\%pi^3}$$

(%i31) `"==================================================="$`

(%i32) `f(x):=log(x)/sqrt(x);`

(%o32) $$f\left(x\right):=\frac{\log\left(x\right)}{\sqrt{x}}$$

(%i33) `ab:diff(f(x),x);`

(%o33) $$\frac{1}{x^{3/2}}-\frac{\log\left(x\right)}{2\ x^{3/2}}$$

(%i34) `factor(%);`

(%o34) $$-\frac{\log\left(x\right)-2}{2\ x^{3/2}}$$

(%i35) `"==================================================="$`

(%i36) `f(x):=(2*cos(x)-sin(x))/(cos(x)+2*sin(x));`

(%o36) $f(x) := \dfrac{2\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + 2\sin(x)}$

(%i37)
```
ab:diff(f(x),x);
```

(%o37) $\dfrac{-2\sin(x) - \cos(x)}{2\sin(x) + \cos(x)} - \dfrac{(2\cos(x) - \sin(x))^2}{(2\sin(x) + \cos(x))^2}$

(%i38)
```
ab,x=%pi/2;
```

(%o38) $-\dfrac{5}{4}$

(%i39)
```
"==================================================="$
```

(%i40)
```
f(x):=(x^3-2*x+5)/(x^2-4*x+1);
```

(%o40) $f(x) := \dfrac{x^3 - 2x + 5}{x^2 - 4x + 1}$

(%i41)
```
ab:diff(f(x),x);
```

(%o41) $\dfrac{3x^2 - 2}{x^2 - 4x + 1} - \dfrac{(2x - 4)(x^3 - 2x + 5)}{(x^2 - 4x + 1)^2}$

(%i42)
```
factor(%);
```

(%o42) $\dfrac{x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 10x + 18}{(x^2 - 4x + 1)^2}$

(%i43)
```
"==================================================="$
```

(%i44)

(%i1) `"=================================================="$`

(%i2) `" Kettenregel                                      "$`

(%i3) `"=================================================="$`

(%i4) `u(x):=4*x^2-2*x+1;`

(%o4) $u(x) := 4\ x^2 - 2\ x + 1$

(%i5) `f(x):=u(x)^5;`

(%o5) $f(x) := u(x)^5$

(%i6) `f(x);`

(%o6) $(4\ x^2 - 2\ x + 1)^5$

(%i7) `"=================================================="$`

(%i8) `ab:diff(f(x),x);`

(%o8) $5\ (8\ x - 2)\ (4\ x^2 - 2\ x + 1)^4$

(%i9) `factor(%);`

(%o9) $10\ (4\ x - 1)\ (4\ x^2 - 2\ x + 1)^4$

(%i10) `"=================================================="$`

(%i14) `" Weitere Beispiele                                "$`

(%i15) `"=================================================="$`

(%i16) `f(x):=log(sqrt(4*x-x^2));`

(%o16) $f(x) := log\left(\sqrt{4\ x - x^2}\right)$

(%i17) `ab:diff(f(x),x);`

(%o17) $\dfrac{4 - 2\ x}{2\ (4\ x - x^2)}$

(%i18) `factor(%);`

(%o18) $\dfrac{x - 2}{(x - 4)\ x}$

(%i19) `"=================================================="$`

(%i20) `f(x):=1/(a+b*x^2)^(1/3);`

(%o20) $f(x) := \dfrac{1}{(a + b\ x^2)^{1/3}}$

(%i21) `ab:diff(f(x),x);`

(%o21) $-\dfrac{2\ b\ x}{3\ (b\ x^2 + a)^{4/3}}$

(%i22) `"=================================================="$`

(%i23) `f(x):=4*exp(cos(x)-sin(x));`

(%o23) $f(x) := 4\ exp(cos(x) - sin(x))$

(%i24) `ab:diff(f(x),x);`

(%o24) $4\ \%e^{\cos(x)-\sin(x)}\left(-\sin(x)-\cos(x)\right)$

(%i25) `ab,x=%pi;`

(%o25) $4\ \%e^{-1}$

(%i26) `"==================================================="$`

(%i27) `f(x):=cos(5*x^2-3*x+1);`

(%o27) $f(x):=\cos\left(5\ x^2-3\ x+1\right)$

(%i28) `ab:diff(f(x),x);`

(%o28) $-\left(10\ x-3\right)\sin\left(5\ x^2-3\ x+1\right)$

(%i29) `"==================================================="$`

(%i30) `f(x):=4*sqrt(x^2+sqrt(x));`

(%o30) $f(x):=4\sqrt{x^2+\sqrt{x}}$

(%i31) `ab:diff(f(x),x);`

(%o31) $$\frac{2\left(2\ x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}$$

(%i32) `ab,x=1;`

(%o32) $$\frac{5}{\sqrt{2}}$$

(%i33) `"==================================================="$`

(%i34) `f(x):=log(cos(1-x^2));`

(%o34) $f(x):=\log\left(\cos\left(1-x^2\right)\right)$

(%i35) `ab:diff(f(x),x);`

(%o35) $$-\frac{2\ x\sin\left(x^2-1\right)}{\cos\left(x^2-1\right)}$$

(%i36) `"==================================================="$`

(%i37) `f(x):=A*exp(-a*x^2)+B*exp(-b*x+c);`

(%o37) $f(x):=A\ \exp\left((-a)\ x^2\right)+B\ \exp\left((-b)\ x+c\right)$

(%i38) `f(x);`

(%o38) $\%e^{c-b\ x}\ B+\%e^{-a\ x^2}\ A$

(%i39) `ab:diff(f(x),x);`

(%o39) $-b\ \%e^{c-b\ x}\ B-2\ a\ x\ \%e^{-a\ x^2}\ A$

(%i40) `ab,x=0;`

(%o40) $-b\ \%e^{c}\ B$

(%i41) `"==================================================="$`

(%i42) `f(x):=sqrt(cos(5*x^2));`

(%o42) $f(x) := \sqrt{\cos\left(5\ x^2\right)}$

(%i43) `ab:diff(f(x),x);`

(%o43) $-\frac{5\ x\ \sin\left(5\ x^2\right)}{\sqrt{\cos\left(5\ x^2\right)}}$

(%i44) `"====================================================="$`

(%i4) `f(x):=5*exp(x^3-2*x+1);`

(%o4) $f(x) := 5\ \exp\left(x^3 - 2\ x + 1\right)$

(%i5) `ab:diff(f(x),x);`

(%o5) $5\left(3\ x^2 - 2\right)\ \%e^{x^3 - 2\ x + 1}$

(%i6) `ab,x=-1;`

(%o6) $5\ \%e^2$

(%i12) `fpprec : 16;`

(%o12) 16

(%i13) `"====================================================="$`

(%i14) `f(x):=exp(x)*cos(x);`

(%o14) $f(x) := \exp(x)\ \cos(x)$

(%i15) `ab:diff(f(x),x);`

(%o15) $\%e^x\ \cos(x) - \%e^x\ \sin(x)$

(%i16) `factor(ab);`

(%o16) $-\ \%e^x\left(\sin(x) - \cos(x)\right)$

(%i17) `"====================================================="$`

(%i18) `f(x):=exp(-x^2)*log(x^3+1);`

(%o18) $f(x) := \exp\left(-\ x^2\right)\ \log\left(x^3 + 1\right)$

(%i19) `ab:diff(f(x),x);`

(%o19) $\frac{3\ x^2\ \%e^{-\ x^2}}{x^3 + 1} - 2\ x\ \%e^{-\ x^2}\ \log\left(x^3 + 1\right)$

(%i20) `factor(ab);`

(%o20) $-\frac{x\ \%e^{-\ x^2}\left(2\ x^3\ \log\left(x^3 + 1\right) + 2\ \log\left(x^3 + 1\right) - 3\ x\right)}{\left(x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)}$

(%i21) `"====================================================="$`

(%i22) `f(x):=log(x^2+1)/x^3;`

(%o22) $f(x) := \frac{\log\left(x^2 + 1\right)}{x^3}$

(%i23) `ab:diff(f(x),x);`

(%o23) $\frac{2}{x^2\left(x^2+1\right)}-\frac{3\log\left(x^2+1\right)}{x^4}$

(%i24)
```
factor(ab);
```

(%o24) $-\frac{3x^2\log\left(x^2+1\right)+3\log\left(x^2+1\right)-2x^2}{x^4\left(x^2+1\right)}$

(%i25)
```
"=================================================="$
```

(%i26)
```
f(x):=(x*sin(x)+cos(x))/(x*cos(x)-sin(x));
```

(%o26) $f\left(x\right):=\frac{x\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)}{x\cos\left(x\right)-\sin\left(x\right)}$

(%i27)
```
ab:diff(f(x),x);
```

(%o27) $\frac{x\sin\left(x\right)\left(x\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)\right)}{\left(x\cos\left(x\right)-\sin\left(x\right)\right)^2}+\frac{x\cos\left(x\right)}{x\cos\left(x\right)-\sin\left(x\right)}$

(%i28)
```
ab,x=%pi;
```

(%o28) 1

(%i29)
```
"=================================================="$
```

(%i30)
```
f(x):=sqrt((x^2-a^2)/(a^2+x^2));
```

(%o30) $f\left(x\right):=\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2+x^2}}$

(%i31)
```
ab:diff(f(x),x);
```

(%o31) $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$

(%i32)
```
"=================================================="$
```

(%i33)

```
(%i1) "==================================================="$
(%i2) " Ableitung der Sinusfunktion                      "$
(%i3) "==================================================="$
(%i4) f1(x):=sin(2*x);
```

(%o4) $f1(x) := \sin(2\,x)$

```
(%i5) f2(x):=sin(x/2);
```

(%o5) $f2(x) := \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

```
(%i6) f3(x):=sin(3+4*x);
```

(%o6) $f3(x) := \sin(3 + 4\,x)$

```
(%i7) f4(x):=sin(5-2*x);
```

(%o7) $f4(x) := \sin(5 - 2\,x)$

```
(%i8) f5(x):=sin(sqrt(x));
```

(%o8) $f5(x) := \sin\left(\sqrt{x}\right)$

```
(%i11) f6(x):=sin(x^(2));
```

(%o11) $f6(x) := \sin\left(x^2\right)$

```
(%i12) f7(x):=sin(3*x^(-3));
```

(%o12) $f7(x) := \sin\left(3\,x^{-3}\right)$

```
(%i13) f8(x):=sin(sqrt(3*x)-5);
```

(%o13) $f8(x) := \sin\left(\sqrt{3\,x} - 5\right)$

```
(%i14) "==================================================="$
(%i15) ab1:diff(f1(x),x);
```

(%o15) $2\cos(2\,x)$

```
(%i16) ab2:diff(f2(x),x);
```

(%o16) $\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2}$

```
(%i17) ab3:diff(f3(x),x);
```

(%o17) $4\cos(4\,x + 3)$

```
(%i18) ab4:diff(f4(x),x);
```

(%o18) $-2\cos(2\,x - 5)$

```
(%i19) ab5:diff(f5(x),x);
```

(%o19) $\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$

```
(%i21) ab6:diff(f6(x),x);
```

(%o21) $2\,x\cos\left(x^2\right)$

```
(%i22) ab7:diff(f7(x),x);
```

(%o22) $-\frac{9\cos\left(\frac{3}{x^3}\right)}{x^4}$

(%i23) ab8:diff(f8(x),x);

(%o23) $\frac{\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\sqrt{x}-5\right)}{2\sqrt{x}}$

(%i24)

wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net

Bezugsquelle dieser Programme im Internet.

Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.

```
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Potenzregel "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) f(x):=x^n;
```

Wenn man in einer Potenz die Basis als unabhängige Variable x und der Wert der Potenz als abhängige Variable y genommen wird, spricht man von einer Potenzfunktion

(%o4) $f(x) := x^n$

```
(%i5) k(x,h):=(f(x+h)-f(x))/h;
```

Diesen Ausruck nennt man Differenzenquotient

(%o5) $k(x, h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

```
(%i6) limit(k(x,h),h,0);
```

Dieser Grenzwert heißt Differentialquotient

(%o6) $n\, x^{n-1}$

```
(%i7) "****************************************************"$
(%i8) " Das ist die Regel für die Ableitung einer Potenz "$
(%i9) "****************************************************"$
(%i10)
```

Man bestimmt die Ableitung einer Potenz, in dem man die Hochzahl um 1 vermindert und mit der alten Hochzahl multipliziert.

Hinweis:

die Integralrechnung ist die Umkehrung der Differentialrechnung.

Daher gibt es dort die Regel:

Man bestimmt das Integral einer Potenz, in dem man die Hochzahl um 1 vermehrt und durch die neue Hochzahl dividiert

(%i1) "=="$

(%i2) " Relative Extremwerte "$

(%i3) "=="$

(%i4) f(x):=2*(1-exp(3-x))^2;

(%o4) $f(x) := 2\left(1 - exp(3 - x)\right)^2$

(%i5) ab:diff(f(x),x);

(%o5) $4\left(1 - \%e^{3-x}\right)\%e^{3-x}$

(%i6) solve(ab=0,x);

(%o6) $[\ x = 3\ ,\ \%e^{3-x} = 0\ ]$

(%i7) f(3);

(%o7) 0

(%i8) "P(3,0)";

(%o8) *P(3,0)*

(%i9) ab2:diff(ab,x);

(%o9) $4\,\%e^{6-2x} - 4\left(1 - \%e^{3-x}\right)\%e^{3-x}$

(%i10) ab2,x=3;

(%o10) 4

(%i11) "=="$

(%i12) " relatives Minimum in (3,0) "$

(%i13) "=="$

(%i14) f(x):=2*sqrt(1-x)+2*sqrt(x+1);

(%o14) $f(x) := 2\sqrt{1 - x} + 2\sqrt{x + 1}$

(%i15) ab:diff(f(x),x);

(%o15) $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

(%i21) g:%o15=0;

(%o21) $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 0$

(%i22) g:g+1/sqrt(1-x);

(%o22) $\frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

(%i23) g:g^2;

(%o23) $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-x}$

(%i24) solve(g,x);

(%o24) $[\ x = 0\ ]$

(%i25) f(0);

(%o25) 4

```
(%i26) ab2:diff(f(x),x,2);
```

(%o26) $-\frac{1}{2\left(x+1\right)^{3/2}}-\frac{1}{2\left(1-x\right)^{3/2}}$

```
(%i27) ab2,x=0;
```

(%o27) -1

```
(%i28) "==============================================="$
(%i29) " Im Punkt (0,4) gibt es ein Maximum           "$
(%i30) "==============================================="$
(%i31) f(x):=3+x/(x+a)^2;
```

(%o31) $f\left(x\right):=3+\frac{x}{\left(x+a\right)^2}$

```
(%i32) ab:diff(f(x),x);
```

(%o32) $\frac{1}{\left(x+a\right)^2}-\frac{2\,x}{\left(x+a\right)^3}$

```
(%i33) solve(ab=0,x);
```

(%o33) $[\,x=a\,]$

```
(%i34) f(a);
```

(%o34) $\frac{1}{4\,a}+3$

```
(%i35) ab2:diff(f(x),x,2);
```

(%o35) $\frac{6\,x}{\left(x+a\right)^4}-\frac{4}{\left(x+a\right)^3}$

```
(%i36) ab2,x=a;
```

(%o36) $-\frac{1}{8\,a^3}$

```
(%i37) "==============================================="$
(%i38) " Wenn a>0 ist, liegt ein Maximum vor          "$
(%i39) "==============================================="$
(%i40) f(x):=x^3*exp(-2*x);
```

(%o40) $f\left(x\right):=x^3\,exp\left(\left(-2\right)\,x\right)$

```
(%i41) ab:diff(f(x),x);
```

(%o41) $3\,x^2\,\%e^{-2\,x}-2\,x^3\,\%e^{-2\,x}$

```
(%i42) solve(ab=0,x);
```

(%o42) $[\,x=\frac{3}{2},\,x=0\,]$

```
(%i43) f(3/2);
```

(%o43) $\frac{27\,\%e^{-3}}{8}$

```
(%i44) f(0);
(%o44) 0
(%i45) ab2:diff(f(x),x,2);
```
(%o45) $4\ x^3\ \%e^{-2\ x} - 12\ x^2\ \%e^{-2\ x} + 6\ x\ \%e^{-2\ x}$
```
(%i46) ab2,x=3/2;
```
(%o46) $-\frac{9\ \%e^{-3}}{2}$
```
(%i47) ab2,x=0;
(%o47) 0
(%i48) "==============================================="$
(%i49) " Für x=3/2 gibt es ein Maximum                 "$
(%i50) " Für x=0 gibt es einen Wendepunkt              "$
(%i51) "==============================================="$
(%i52) f(x):=(x-1)*exp(-2*x);
```
(%o52) $f(x) := (x-1)\ exp((-2)\ x)$
```
(%i53) ab:diff(f(x),x);
```
(%o53) $\%e^{-2\ x} - 2\ (x-1)\ \%e^{-2\ x}$
```
(%i54) solve(ab=0);
```
(%o54) $[\ x = \frac{3}{2}\ ]$
```
(%i55) f(3/2);
```
(%o55) $\frac{\%e^{-3}}{2}$
```
(%i56) ab2:diff(f(x),x,2);
```
(%o56) $4\ (x-1)\ \%e^{-2\ x} - 4\ \%e^{-2\ x}$
```
(%i57) ab2,x=3/2;
```
(%o57) $-2\ \%e^{-3}$
```
(%i58) "==============================================="$
(%i59) " Für x=3/2 gibt es ein Maximum                 "$
(%i60) "==============================================="$
(%i61) f(x):=2*x^2*log(sqrt(x));
```
(%o61) $f(x) := 2\ x^2\ log(\sqrt{x})$
```
(%i62) ab:diff(f(x),x);
```
(%o62) $2\ x\ log(x) + x$
```
(%i63) solve(ab=0,x);
```
(%o63) $[\ x = \frac{1}{\sqrt{\%e}},\ x = 0\ ]$

```
(%i64) f(1/sqrt(%e));
```

(%o64) $-\frac{\%e^{-1}}{2}$

```
(%i65) f(0);
log(0) has been generated.
#0: f(x=0)
 -- an error.  Quitting.  To debug this try debugmode(true);
(%i66) "================================================"$
(%i67) " Für x=0 ist die Funktion nicht definiert      "$
(%i68) "================================================"$
(%i69) ab2:diff(f(x),x,2);
```

(%o69) $2\, log(x) + 3$

```
(%i71) ab2,x=1/sqrt(%e);
(%o71) 2
(%i72) "================================================"$
(%i73) " Für den anderen x-Wert gibt es ein Minimum    "$
(%i74) "================================================"$
(%i75)
```

Der Extremwert von 3 Parabeln

Aufgabe 1

$$y = x^2 - 8x + 15$$

$$y' = 2x - 8$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 8 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 4$$

$$y(4) = 16 - 32 + 15 = -1$$

Lösung mit Maxima

(%i1) f(x):=x^2-8*x+15;

(%o1) $f(x) := x^2 - 8x + 15$

(%i2) ab:diff(f(x),x);

(%o2) $2x - 8$

(%i3) solve(ab=0,x);

(%o3) $[x = 4]$

(%i4) f(4);

(%o4) -1

Aufgabe 2

$$y = x^2 - 8x + 16$$

$$x = 4$$
$$y = 0$$

Lösung mit Maxima

```
(%i1) f(x):=x^2-8*x+16;
```

(%o1) $f(x) := x^2 - 8\,x + 16$

```
(%i2) ab:diff(f(x),x);
```

(%o2) $2\,x - 8$

```
(%i3) solve(ab=0,x);
```

(%o3) $[\,x = 4\,]$

```
(%i4) f(4);
```

(%o4) 0

Aufgabe 3

$y = x^2 - 8x + 17$

$x = 4$

$y = 1$

Lösung mit Maxima

```
(%i1) f(x):=x^2-8*x+17;
```

(%o1) $f(x) := x^2 - 8\,x + 17$

```
(%i2) ab:diff(f(x),x);
```

(%o2) $2\,x - 8$

```
(%i3) solve(ab=0,x);
```

(%o3) $[\,x = 4\,]$

```
(%i4) f(4);
```

(%o4) 1

(%i1) `f(x):=log(1.5-cos(x)^2);`

(%o1) $f(x) := \log\left(1.5 - \cos(x)^2\right)$

(%i2) `"=================================================="$`

(%i3) `ab:diff(f(x),x);`

(%o3) $\frac{2\ \cos(x)\ \sin(x)}{1.5 - \cos(x)^2}$

(%i4) `solve(ab=0,x);`

```
`rat' replaced 1.5 by 3//2 = 1.5
`solve' is using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.
```

(%o4) $[\ x = 0\ ,\ x = \frac{\%pi}{2}\ ]$

(%i5) `"=================================================="$`

(%i6) `" Das sind nicht alle Lösungen                      "$`

(%i7) `"=================================================="$`

(%i9) `ab2:diff(f(x),x,2);`

(%o9) $-\frac{2\ \sin(x)^2}{1.5 - \cos(x)^2} - \frac{4\ \cos(x)^2\ \sin(x)^2}{\left(1.5 - \cos(x)^2\right)^2} + \frac{2\ \cos(x)^2}{1.5 - \cos(x)^2}$

(%i10) `ab2,x=0;`

(%o10) 4.0

(%i11) `"=================================================="$`

(%i12) `" Hier gibt es ein Minimum                          "$`

(%i13) `"=================================================="$`

(%i14) `ab2,x=%pi/2;`

(%o14) -1.333333333333333

(%i15) `"=================================================="$`

(%i16) `" Hier gibt es das Maximum                          "$`

(%i17) `"=================================================="$`

(%i18) `g(x):=exp(x)*cos(0.5*x);`

(%o18) $g(x) := \exp(x)\ \cos(0.5\ x)$

(%i19) `ab:diff(f(x),x);`

(%o19) $\frac{2\ \cos(x)\ \sin(x)}{1.5 - \cos(x)^2}$

(%i20) `solve(ab=0,x);`

```
`rat' replaced 1.5 by 3//2 = 1.5
`solve' is using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.
```

(%o20) $[\ x = 0\ ,\ x = \frac{\%pi}{2}\ ]$

(%i21) ab2:diff(f(x),x,2);

(%o21) $$-\frac{2\ sin(x)^2}{1.5 - cos(x)^2} - \frac{4\ cos(x)^2\ sin(x)^2}{\left(1.5 - cos(x)^2\right)^2} + \frac{2\ cos(x)^2}{1.5 - cos(x)^2}$$

(%i22) ab2,x=0;

(%o22) 4.0

(%i23) ab2,x=-%pi/2;

(%o23) - 1.333333333333333

(%i24)

(%i1) f(x):=x^4-x^3-3*x^2+5*x-2;

(%o1) $f(x) := x^4 - x^3 + (-3)\,x^2 + 5\,x - 2$

(%i2) solve(f(x)=0,x);

(%o2) $[x = -2 , x = 1]$

(%i3) "=="$

(%i4) ab:diff(f(x),x);

(%o4) $4\,x^3 - 3\,x^2 - 6\,x + 5$

(%i5) solve(ab=0,x);

(%o5) $[x = -\frac{5}{4}, x = 1]$

(%i6) f(-5/4);

(%o6) $-\frac{2187}{256}$

(%i7) f(1);

(%o7) 0

(%i8) "=="$

(%i9) ab2:diff(f(x),x,2);

direkte Berechnung der zweiten Ableitung

(%o9) $12\,x^2 - 6\,x - 6$

(%i10) ab2,x=-5/4;

(%o10) $\frac{81}{4}$

(%i11) "=="$

(%i12) " hier gibt es ein Minimum   "$

(%i13) "=="$

(%i14) solve(ab2=0);

(%o14) $[x = 1 , x = -\frac{1}{2}]$

(%i15) "=="$

(%i16) " Für x=1 gibt es einen Sattelpunkt   "$ horizontale Wendetangente

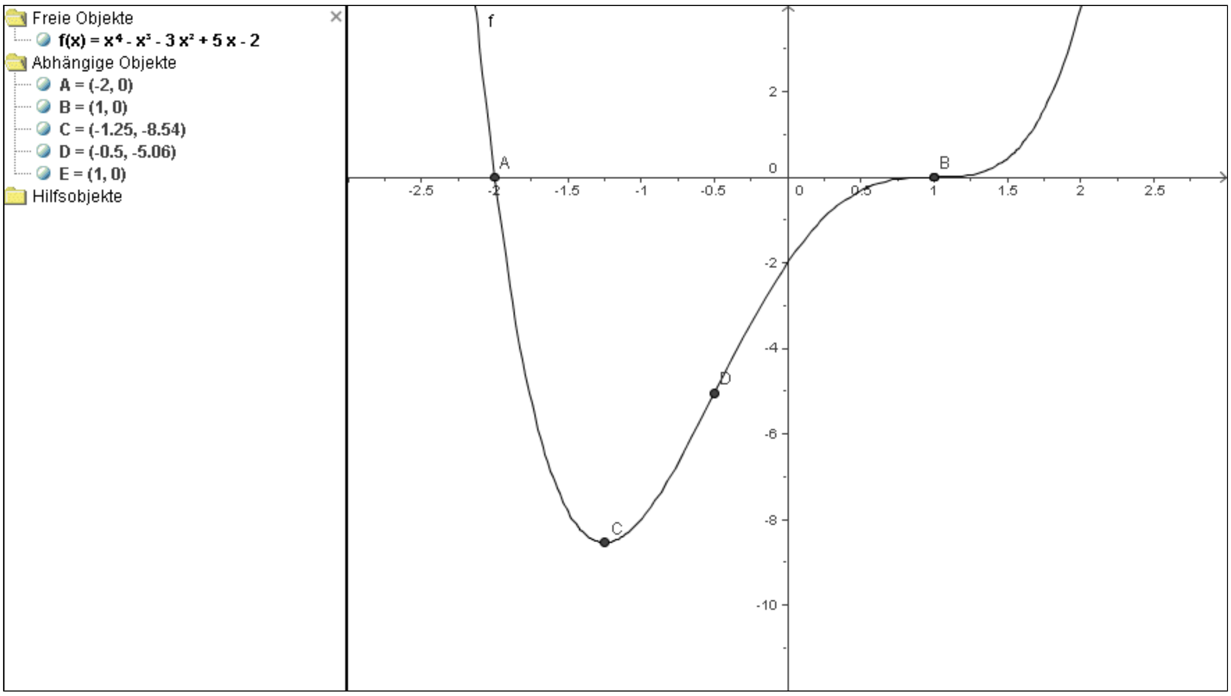
(%i17) " Für x=-1/2 gibt es einen Wendepunkt   "$

(%i18) "=="$

(%i19)

Grafische Darstellung zur Aufgabe

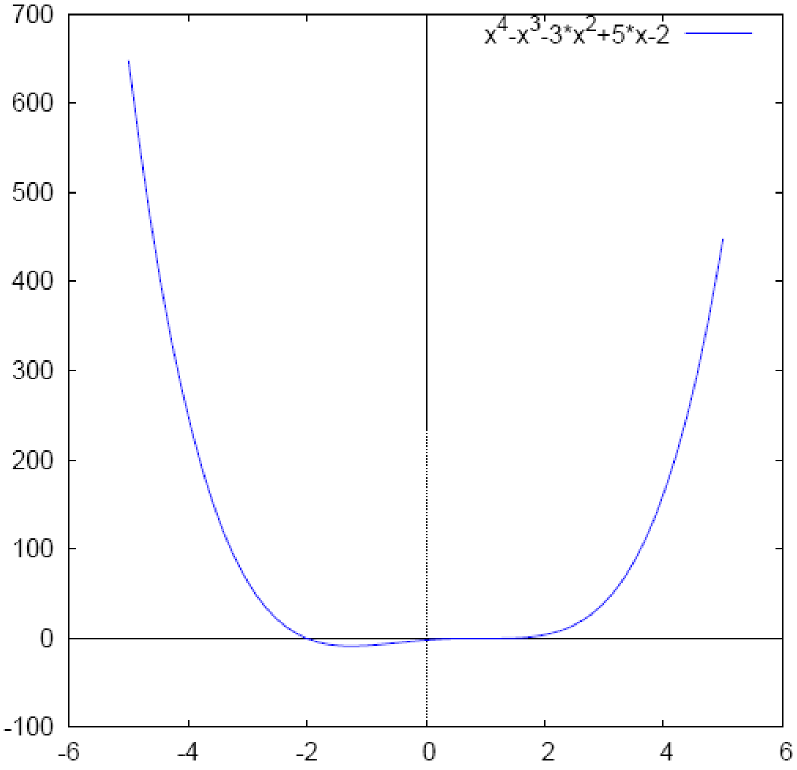
Johann Weilharter - 27.04.2006



Nr.	Name	Definition	Algebra
1	Funktion f		$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$
2	Punkt A	Nullstelle von f	A = (-2, 0)
2	Punkt B	Nullstelle von f	B = (1, 0)
3	Punkt C	Extremum von f	C = (-1.25, -8.54)
4	Punkt D	Wendepunkt von f	D = (-0.5, -5.06)
4	Punkt E	Wendepunkt von f	E = (1, 0)

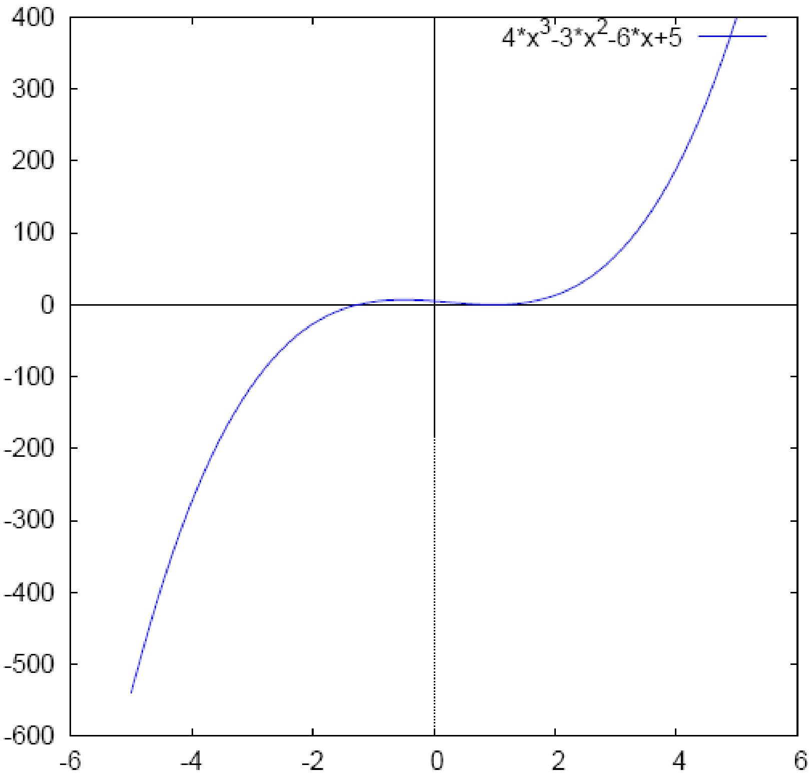
Erstellt mit GeoGebra

Die Funktion



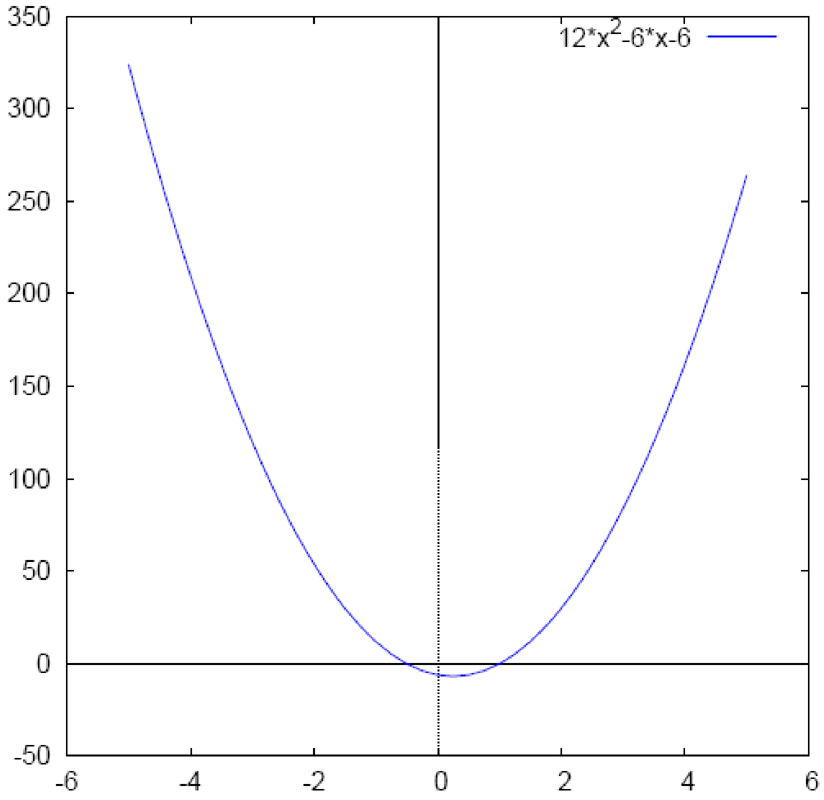
Man beachte den unterschiedlichen Eindruck zur Grafik derselben Funktion auf der vorhergehenden Seite aufgrund der verschiedenen Skalierung

Die erste Ableitung



eine typische Funktion dritten Grades

Die zweite Ableitung



eine Parabel

Die Bedeutung der Kurvendiskussion ist mit Sicherheit sehr zurückgegangen, da es hervorragende Möglichkeiten zur grafischen Darstellung von Funktionen gibt

Analysis: Ableitung, Kurvendiskussion (Beispiel)

(%i1) `f(x):=-(x-2)^2/(x+2);`

(%o1) $f(x) := \frac{-(x-2)^2}{x+2}$

(%i2) `"==================================================="$`

(%i3) `" Nullstellen                                       "$`

(%i4) `"==================================================="$`

(%i5) `solve(f(x)=0,x);`

(%o5) $[\ x = 2\ ]$

(%i6) `"==================================================="$`

(%i7) `" Extremwerte                                       "$`

(%i8) `"==================================================="$`

(%i9) `ab:diff(f(x),x);`

(%o9) $\frac{(x-2)^2}{(x+2)^2} - \frac{2\,(x-2)}{x+2}$

(%i10) `solve(ab=0,x);`

(%o10) $[\ x = -6\ ,\ x = 2\ ]$

(%i11) `ab2:diff(ab,x);`

(%o11) $-\frac{2}{x+2} + \frac{4\,(x-2)}{(x+2)^2} - \frac{2\,(x-2)^2}{(x+2)^3}$

(%i12) `ab2,x=-6;`

(%o12) $\frac{1}{2}$

(%i15) `" Minimum                                           "$`

(%i16) `ab2,x=2;`

(%o16) $-\frac{1}{2}$

(%i17) `" Maximum                                           "$`

(%i18) `"==================================================="$`

(%i19) `" Wendepunkt                                        "$`

(%i20) `"==================================================="$`

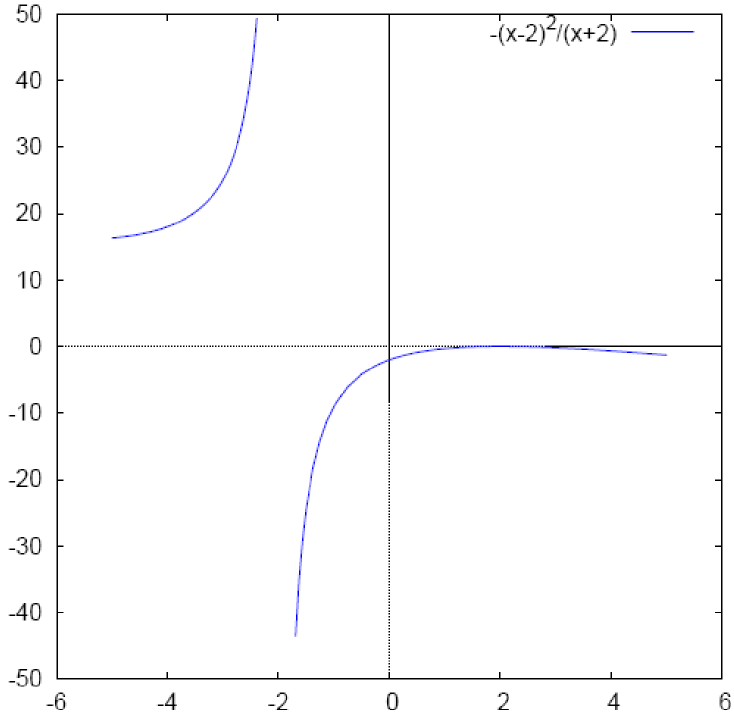
(%i21) `solve(ab2=0,x);`

(%o21) $[\ ]$

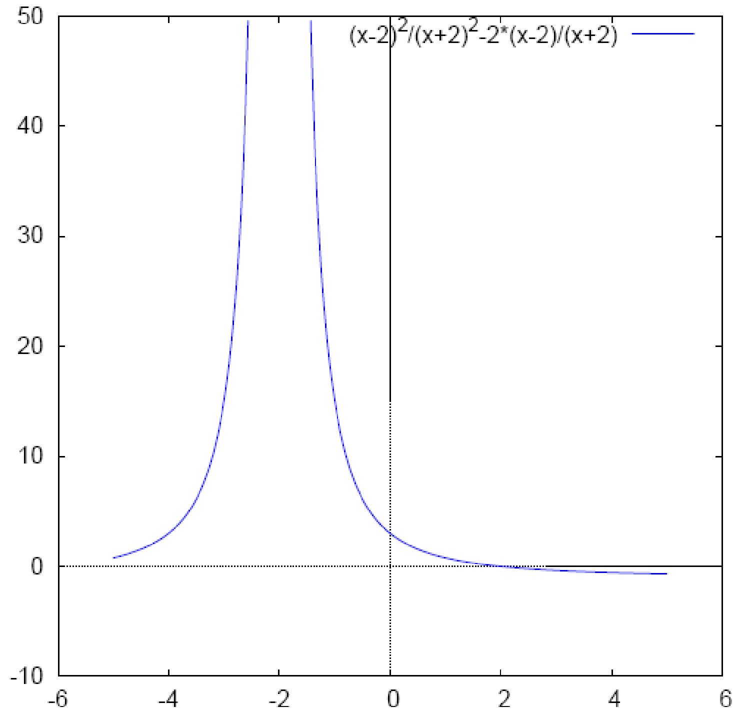
(%i22) `" es gibt keinen Wendepunkt                         "$`

(%i23)

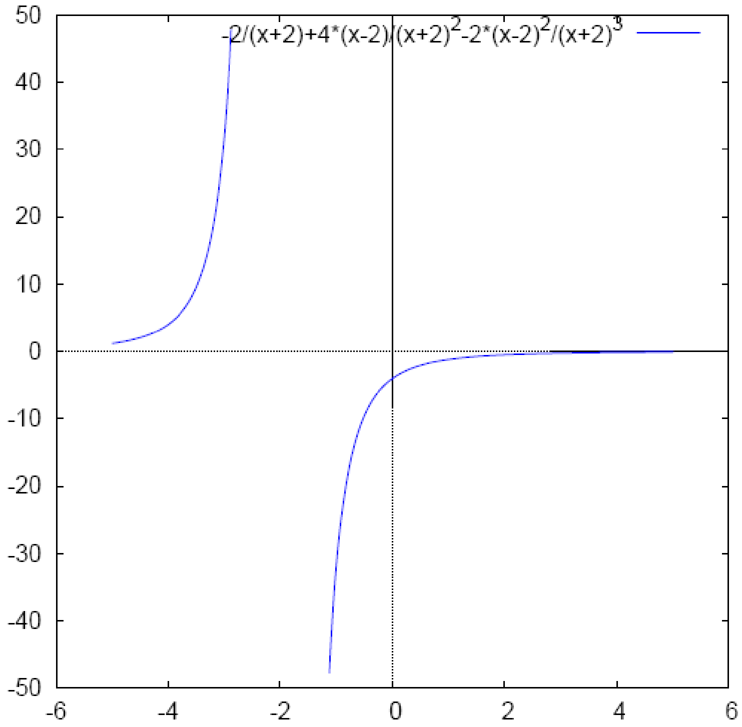
Die Funktion



Die Ableitung



Die zweite Ableitung



```
(%i1) f(x):=(3*x^3+3*x-6)/x;
```

(%o1) $f(x) := \frac{3\,x^3 + 3\,x - 6}{x}$

```
(%i2) "=====================================================" $
(%i3) " Nullstellen                                         " $
(%i4) "=====================================================" $
(%i5) solve(f(x)=0,x);
```

(%o5) $[\,x = -\frac{\sqrt{7}\ \%i + 1}{2},\ x = \frac{\sqrt{7}\ \%i - 1}{2},\ x = 1\,]$

es gibt nur eine reelle Nullstelle

```
(%i6) "=====================================================" $
(%i7) " Extremwerte                                         " $
(%i8) "=====================================================" $
(%i9) ab:diff(f(x),x);
```

(%o9) $\frac{9\,x^2 + 3}{x} - \frac{3\,x^3 + 3\,x - 6}{x^2}$

```
(%i10) solve(ab=0,x);
```

(%o10) $[\,x = -\frac{\sqrt{3}\ \%i - 1}{2},\ x = \frac{\sqrt{3}\ \%i + 1}{2},\ x = -1\,]$

```
(%i11) "=====================================================" $
(%i12) " Wendepunkt                                          " $
(%i13) "=====================================================" $
(%i14) ab2:diff(ab,x);
```

(%o14) $\frac{2\,(3\,x^3 + 3\,x - 6)}{x^3} - \frac{2\,(9\,x^2 + 3)}{x^2} + 18$

```
(%i15) solve(ab2=0,x);
```

(%o15) $[\,x = \frac{2^{1/3}\sqrt{3}\ \%i - 2^{1/3}}{2},\ x = -\frac{2^{1/3}\sqrt{3}\ \%i + 2^{1/3}}{2},\ x = 2^{1/3}\,]$

```
(%i16)
```

Analysis: Ableitungen, Kurvendiskussion (nur notwendige Bedingungen kontrollieren)

(%i1) f(x):=sqrt((4-x)^2*(x+2));

(%o1) $f(x) := \sqrt{(4-x)^2\,(x+2)}$

(%i2) "=="$

(%i3) " Nullstellen   "$

(%i4) "=="$

(%i5) solve(f(x)=0,x);

(%o5) $[\,x = -2\,,\ |x-4| = 0\,]$

(%i6) "=="$

(%i7) " Extremwerte   "$

(%i8) "=="$

(%i9) ab:diff(f(x),x);

(%o9) $\frac{|x-4|}{2\sqrt{x+2}} + \frac{(x-4)\sqrt{x+2}}{|x-4|}$

(%i10) solve(ab=0,x);

(%o10) $[\,x = 0\,,\ x = 4\,]$

(%i11) "=="$

(%i12) " Wendepunkt   "$

(%i13) "=="$

(%i14) ab2:diff(ab,x);

(%o14) $\frac{x-4}{\sqrt{x+2}\,|x-4|} - \frac{|x-4|}{4\,(x+2)^{3/2}}$

(%i15) solve(ab2=0,x);

(%o15) $[\,x = -4\,,\ x = 4\,]$

(%i16)

```
(%i1)  "==============================================="$
(%i2)  " Kurvendiskussion                              "$
(%i3)  "==============================================="$
(%i4)  f(x):=x^4-6*x^3+9*x^2-4*x;
```

(%o4) $f(x) := x^4 - 6\ x^3 + 9\ x^2 + (-4)\ x$

```
(%i5)  "==============================================="$
(%i6)  solve(f(x)=0);
```

(%o6) $[\ x = 4\ ,\ x = 1\ ,\ x = 0\ ]$

```
(%i8)  realroots(f(x));
```

(%o8) $[\ x = 1\ ,\ x = 4\ ,\ x = 0\ ]$

```
(%i9)  "==============================================="$
(%i10) ab:diff(f(x),x);
```

(%o10) $4\ x^3 - 18\ x^2 + 18\ x - 4$

```
(%i11) solve(ab=0,x);
```

(%o11) $[\ x = -\frac{\sqrt{33} - 7}{4}\ ,\ x = \frac{\sqrt{33} + 7}{4}\ ,\ x = 1\ ]$

```
(%i12) " Anmerkung: x=1 ist eine doppelte Nullstelle   "$
(%i13) %o11;
```

(%o13) $[\ x = -\frac{\sqrt{33} - 7}{4}\ ,\ x = \frac{\sqrt{33} + 7}{4}\ ,\ x = 1\ ]$

```
(%i14) %,numer;
```

(%o14) $[\ x = 0.31385933836549\ ,\ x = 3.186140661634507\ ,\ x = 1\ ]$

```
(%i15) f(0.31);
```

(%o15) -0.54461079

```
(%i16) f(3.19);
```

(%o16) -12.39264279000001

```
(%i17) f(1);
```

(%o17) 0

```
(%i18) "==============================================="$
(%i19) " Extremwerte (0,31/-0,54), (3,19/-12,39)       "$
(%i20) " und (1/0)                                     "$
(%i21) "==============================================="$
(%i22) ab2:diff(ab,x);
```

(%o22) $12\ x^2 - 36\ x + 18$

```
(%i23) ab2,x=0.31;
```

(%o23) 7.9932

```
(%i24) ab2,x=3.19;
```

(%o24) 25.2732

```
(%i25) ab2,x=1;
(%o25) - 6
(%i26) "==================================================="$
(%i27) " Der dritte Extremwert ist ein Maximum, die      "$
(%i28) " anderen sind Minima                             "$
(%i29) "==================================================="$
(%i30) solve(ab2=0,x);
```

(%o30) $[x = -\frac{\sqrt{3}-3}{2}, x = \frac{\sqrt{3}+3}{2}]$

```
(%i31) %,numer;
(%o31) [ x = 0.63397459621556 , x = 2.366025403784438 ]
(%i32) f(0.63);
(%o32) - 0.29065239
(%i33) f(2.37);
(%o33) - 7.250652390000003
(%i34) "==================================================="$
(%i35) " Es gibt zwei Wendepunkte                        "$
(%i36) "==================================================="$
(%i37)
```

```
(%i1) "==================================================="$
(%i2) " Nullstellen                                       "$
(%i3) "==================================================="$
(%i4) f(x):=3*x^2-4*x+1;
```

(%o4) $f(x) := 3\ x^2 - 4\ x + 1$

```
(%i5) solve(f(x)=0,x);
```

(%o5) $[\ x = 1\ ,\ x = \frac{1}{3}\ ]$

```
(%i6) "==================================================="$
(%i10) f(x):=x^6-3*x^3-4;
```

(%o10) $f(x) := x^6 - 3\ x^3 - 4$

```
(%i11) realroots(f(x));
```

(%o11) $[\ x = -1\ ,\ x = \frac{53264341}{33554432}\ ]$

```
(%i12) solve(f(x)=0,x);
```

(%o12) $[\ x = -\frac{\sqrt{3}\ \%i - 1}{2}\ ,\ x = \frac{\sqrt{3}\ \%i + 1}{2}\ ,\ x = -1\ ,\ x = \frac{\sqrt{3}\ 4^{1/3}\ \%i - 4^{1/3}}{2}\ ,\ x = -\frac{\sqrt{3}\ 4^{1/3}\ \%i + 4^{1/3}}{2}\ ,\ x = 4^{1/3}\ ]$

```
(%i13) "==================================================="$
(%i14) f(x):=4*x^4+4*x^3-6*x^2-6*x;
```

(%o14) $f(x) := 4\ x^4 + 4\ x^3 + (-6)\ x^2 + (-6)\ x$

```
(%i15) realroots(f(x));
```

(%o15) $[\ x = -\frac{41095619}{33554432}\ ,\ x = -1\ ,\ x = \frac{41095619}{33554432}\ ,\ x = 0\ ]$

```
(%i16) %,numer;
```

(%o16) $[\ x = -1.224744886159897\ ,\ x = -1\ ,\ x = 1.224744886159897\ ,\ x = 0\ ]$

```
(%i17) solve(f(x)=0,x);
```

(%o17) $[\ x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ ,\ x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ ,\ x = -1\ ,\ x = 0\ ]$

```
(%i18)
```

(%i1) `"*********************************************"$`

(%i2) `" Newtonverfahren                              "$`

(%i3) `"*********************************************"$`

(%i4) `f(x):=2.4*log(x)+0.5*x^2+1;`

(%o4) $f\left(x\right) := 2.4\ log\left(x\right) + 0.5\ x^{2} + 1$

(%i5) `ab:diff(f(x),x);`

(%o5) $1.0\ x + \frac{2.4}{x}$

(%i6) `a(x):=x+2.4/x;`

(%o6) $a\left(x\right) := x + \frac{2.4}{x}$

(%i7) `g(n):=x[n+1]:x[n]-f(x[n])/a(x[n]);`

(%o7) $g\left(n\right) := x_{n+1} : x_{n} - \frac{f\left(x_{n}\right)}{a\left(x_{n}\right)}$

eine sehr effiziente Vorgangsweise:
das Newtonsche Iterationsverfahren
wird als Funktion definiert!!!

Eine Funktion kann also ein sehr komplexes
Objekt sein

(%i8) `x[1]:0.6;`

(%o8) 0.6

(%i9) `g(1);`

(%o9) 0.60999597761704

(%i10) `g(2);`

(%o10) 0.61005747063289

(%i11) `g(3);`

(%o11) 0.61005747290031

(%i12) `g(4);`

(%o12) 0.61005747290031

(%i13) `"============================================"$`

(%i14) `" anderer Startwert                           "$`

(%i15) `"============================================"$`

(%i20) `x[1]:100.5;`

(%o20) 100.5

(%i21) `g(1);`

(%o21) 50.141922412053

(%i22) `g(2);`

(%o22) 24.88774349440388

(%i23) `g(3);`

(%o23) 12.14310133411932

(%i24) `g(4);`

(%o24) 5.602192683077507

(%i25) `g(5);`

(%o25) 2.148494321681789

```
(%i26) g(6);
(%o26) 0.57343148596781
(%i27) g(7);
(%o27) 0.60921149396369
(%i28) g(8);
(%o28) 0.61005704332455
(%i29) g(9);
(%o29) 0.6100574729002
(%i30) g(10);
(%o30) 0.61005747290031
(%i31) g(11);
(%o31) 0.61005747290031
(%i32) "=============================================="$
(%i33) " der Startwert war offenbar nicht günstig      "$
(%i34) "=============================================="$
(%i35)
```

(%i1) f(x):=tan(x)+x;

(%o1) $f(x) := tan(x) + x$

(%i2) ab:diff(f(x),x);

(%o2) $sec(x)^2 + 1$

(%i3) a(x):=sec(x)^2+1;

(%o3) $a(x) := sec(x)^2 + 1$

(%i4) g(n):=x[n+1]:x[n]-f(x[n])/a(x[n]);

(%o4) $g(n) := x_{n+1} : x_n - \frac{f(x_n)}{a(x_n)}$

(%i5) x[1]:2.0;

(%o5) 2.0

(%i6) g(1);

(%o6) 2.027314579151331

(%i7) g(2);

(%o7) 2.028754298128616

(%i8) g(3);

(%o8) 2.028757838089168

(%i9) g(4);

(%o9) 2.028757838110434

(%i10) g(5);

(%o10) 2.028757838110434

(%i11) "==="$

(%i12) " Gefundene Lösung   "$

(%i13) "==="$

(%i14) f(x):=x*tan(x)-1;

(%o14) $f(x) := x\ tan(x) - 1$

(%i15) ab:diff(f(x),x);

(%o15) $tan(x) + x\ sec(x)^2$

(%i16) a(x):=tan(x)+x*sec(x)^2;

(%o16) $a(x) := tan(x) + x\ sec(x)^2$

(%i17) g(n):=x[n+1]:x[n]-f(x[n])/a(x[n]);

(%o17) $g(n) := x_{n+1} : x_n - \frac{f(x_n)}{a(x_n)}$

(%i18) x[1]:0.9;

(%o18) 0.9

(%i19) g(1);

(%o19) 0.86262773725223

```
(%i20) g(2);
(%o20) 0.86034135296205
(%i21) g(3);
(%o21) 0.86033358910837
(%i22) g(4);
(%o22) 0.86033358901938
(%i23) g(5);
(%o23) 0.86033358901938
(%i24) "==============================================="$
(%i25)
```

```
(%i2) f(x):=0.1*x^3-0.3*x^2+0.5*x-0.7;
```

(%o2) $f(x) := 0.1\ x^3 - 0.3\ x^2 + 0.5\ x - 0.7$

```
(%i3) ab:diff(f(x),x);
```

(%o3) $0.3\ x^2 - 0.6\ x + 0.5$

```
(%i4) a(x):=0.3*x^2-0.6*x+0.5;
```

(%o4) $a(x) := 0.3\ x^2 - 0.6\ x + 0.5$

```
(%i5) x[0]:2.5;
```

(%o5) 2.5

```
(%i7) g(n):=x[n+1]:x[n]-f(x[n])/a(x[n]);
```

(%o7) $g(n) := x_{n+1} : x_n - \frac{f(x_n)}{a(x_n)}$

```
(%i8) g(0);
```

(%o8) 2.228571428571429

```
(%i9) g(1);
```

(%o9) 2.18084996159274

```
(%i10) g(2);
```

(%o10) 2.179510054404614

```
(%i11) g(3);
```

(%o11) 2.179509024603524

```
(%i12) "================================================"$
(%i13) " Die Lösung ist 2,180                            "$
(%i14) "================================================"$
(%i15)
```

```
(%i1) "================================================="$
(%i2) " Bestimmung der Tangente                         "$
(%i3) "================================================="$
(%i4) f(x):=exp(-2*x)*cos(4*x+%pi);
```

(%o4) $f(x) := exp((-2)\,x)\,cos(4\,x + \%pi)$

```
(%i5) x0:0;
```

(%o5) 0

```
(%i6) f(x0);
```

(%o6) -1

```
(%i7) "================================================="$
(%i8) " Punkt P(0,-1)                                   "$
(%i9) "================================================="$
(%i10) ab:diff(f(x),x);
```

(%o10) $4\,\%e^{-2\,x}\,sin(4\,x) + 2\,\%e^{-2\,x}\,cos(4\,x)$

```
(%i11) ab,x=0;
```

(%o11) 2

```
(%i12) "================================================="$
(%i13) " Die Steigung ist 2                              "$
(%i14) "================================================="$
(%i15) g(x,y):=y=2*x+d;
```

(%o15) $g(x, y) := y = 2\,x + d$

```
(%i16) g:g(x0,f(x0));
```

(%o16) $-1 = d$

```
(%i17) "================================================="$
(%i18) " Der Abschnitt auf der y-Achse ist -1            "$
(%i19) "================================================="$
(%i20) y(x):=2*x-1;
```

(%o20) $y(x) := 2\,x - 1$

```
(%i21) "================================================="$
(%i22) " Das ist die Gleichung der Tangente              "$
(%i23) "================================================="$
(%i24)
```

Analysis: Numerische Integration (Unterzumme und Obersumme)

Wegen der Listenverarbeitung und der Technik der indizierten Variablen ist Maxima für die Durchführung von numerischen Intergrationsmethoden gut geeignet

(%i1) `f(x):=x^2;`

(%o1) $f(x) := x^2$

(%i2) `a:0;` Untergrenze

(%o2) 0

(%i3) `b:1;` Obergrenze

(%o3) 1

(%i4) `n:5;`

(%o4) 5

(%i5) `dx:(b-a)/n;` Streifenbreite

(%o5) $\frac{1}{5}$

(%i6) `g(k):=x[k]:a+k*dx;` Berechnung der Fußpunkte

(%o6) $g(k) := x_k : a + k\ dx$

(%i7) `g(0);`

(%o7) 0

(%i8) `g(1);`

(%o8) $\frac{1}{5}$

(%i9) `g(2);`

(%o9) $\frac{2}{5}$

(%i10) `g(3);`

(%o10) $\frac{3}{5}$

(%i11) `g(4);`

(%o11) $\frac{4}{5}$

(%i12) `g(5);`

(%o12) 1

(%i13) `sum(f(x[k])*dx,k,0,4);` Summierung der Streifen

Untersumme

(%o13) $\frac{6}{25}$

(%i14) `Untersumme:%;`

(%o14) $\frac{6}{25}$

(%i15) `sum(f(x[k])*dx,k,1,5);`

Obersumme

(%o15) $\frac{11}{25}$

(%i16) `OS:%;`

(%o16) $\frac{11}{25}$

(%i17) `F:(Untersumme+OS)/2;`

(%o17) $\frac{17}{50}$

(%i18) `%,numer;`

(%o18) 0.34

(%i19)

(%i1) "=="$

(%i2) " Integrale "$

(%i3) "=="$

(%i4) 'integrate(x/(1+x^2)^2,x,0,1)=integrate(x/(1+x^2)^2,x,0,1);

(%o4) $$\int_{0}^{1} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\, dx = \frac{1}{4}$$

Das einfache Hochkomma von integrate verhindert die Auswertung des Integrals

(%i5) "=="$

(%i6) 'integrate((3*x^8)/(x^3+1),x)=integrate((3*x^8)/(x^3+1),x);

(%o6) $$3 \int \frac{x^8}{x^3+1}\, dx = 3 \left(\frac{\log\left(x^3+1\right)}{3} + \frac{x^6 - 2\, x^3}{6} \right)$$

(%i7) "=="$

(%i8)
'integrate(exp(2*x)/(1+exp(x)),x)=integrate(exp(2*x)/(1+exp(x)),x);

(%o8) $$\int \frac{\%e^{2\,x}}{\%e^{x}+1}\, dx = \%e^{x} - \log\left(\%e^{x}+1\right)$$

(%i9) "=="$

(%i10) 'integrate(sin(x)^3*cos(x)^3,x)=integrate(sin(x)^3*cos(x)^3,x);

(%o10) $$\int \cos(x)^3 \sin(x)^3\, dx = -\frac{2\,\sin(x)^6 - 3\,\sin(x)^4}{12}$$

(%i11) "=="$

(%i12) integrate(1/(cos(x)^2*sqrt(tan(x))),x);

(%o12) $2\,\sqrt{\tan(x)}$

(%i13) "=="$

(%i14) integrate((8*x^3-20*x)/(x^4-5*x^2+4),x);

(%o14) $2\,\log\left(x^4 - 5\,x^2 + 4\right)$

(%i15) "=="$

(%i17) integrate(1/(x^2*sqrt(x^2+1)),x);

(%o17) $$-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

(%i18) "=="$

(%i19) integrate(log(x)^3/x,x);

(%o19) $\frac{\log(x)^4}{4}$

(%i20) "==="$

(%i21) integrate(cos(x)^5,x);

(%o21) $\frac{\sin(x)^5}{5} - \frac{2\ \sin(x)^3}{3} + \sin(x)$

(%i22) "==="$

(%i23) integrate((x+2)^2/(x-10)^2,x);

(%o23) $24\ \log(x - 10) + x - \frac{144}{x - 10}$

(%i24) "==="$

(%i36) integrate(x/(x^2-2*x+10),x);

(%o36) $\frac{\log(x^2 - 2\ x + 10)}{2} + \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2\ x - 2}{6}\right)}{3}$

(%i37) "==="$

(%i39) integrate(x^n*log(x),x);

Is n + 1 zero or nonzero? nonzero;

(%o39) $\frac{x^{n+1}\ \log(x)}{n + 1} - \frac{x^{n+1}}{(n + 1)^2}$

(%i41) "==="$

(%i42) integrate((1+2*x)*exp(-x),x);

(%o42) $2\ (- x - 1)\ \%e^{- x} - \%e^{- x}$

(%i43) factor(%);

(%o43) $-(2\ x + 3)\ \%e^{- x}$

(%i44) "==="$

(%i45) integrate(log(x)^2,x);

(%o45) $x\left(\log(x)^2 - 2\ \log(x) + 2\right)$

(%i46) "==="$

(%i53) integrate((8*x^2-2*x-43)/((x+2)^2*(x-5)),x);

(%o53) $5\ \log(x + 2) + 3\ \log(x - 5) - \frac{1}{x + 2}$

(%i54) "==="$

(%i55) integrate((2*x^3-12*x^2+20*x-2)/(x^2-6*x+9),x);

(%o55) $2\ \log(x - 3) + x^2 - \frac{4}{x - 3}$

(%i56) "==="$

(%i57) integrate(x^3/(x^3+2*x^2-x-2),x);

(%o57) $-\frac{8\log\left(x+2\right)}{3}+\frac{\log\left(x+1\right)}{2}+\frac{\log\left(x-1\right)}{6}+x$

(%i58) "=="$

(%i59) integrate((4*x^4-x^3-38*x^2+9*x+45)/((x^2-9)*(x+1)),x);

(%o59) $\frac{9\log\left(x+3\right)}{4}-\frac{3\log\left(x+1\right)}{8}+\frac{9\log\left(x-3\right)}{8}+\frac{4x^2-10x}{2}$

(%i60) "=="$

(%i61) integrate((5*x^2-7*x+20)/(x^3-3*x^2+12*x-10),x);

(%o61) $\frac{3\log\left(x^2-2x+10\right)}{2}+\operatorname{atan}\left(\frac{2x-2}{6}\right)+2\log\left(x-1\right)$

(%i62) "=="$

(%i63)

Wichtiger Hinweis:

Es ist nicht notwendig, viel Energie für die Ermittlung von Integralen zu verwenden.

Wichtig ist, dass

* die Schüler/innen verstehen, dass die Integralrechnung die Umkehrung der Differentialrechnung ist und
* das klar wird, bei welchen Anwendungen die Integralrechnung sinnvoll verwendet werden kann.

(%i1) `integrate((1+x)^4,x);`

(%o1) $\frac{x^5}{5}+x^4+2\,x^3+2\,x^2+x$

(%i2) `integrate((3*x-2)^2,x);`

(%o2) $3\,x^3-6\,x^2+4\,x$

(%i3) `integrate((2-x)^3,x);`

(%o3) $-\frac{x^4}{4}+2\,x^3-6\,x^2+8\,x$

(%i4) `integrate(x*(3*x^2-1)^2,x);`

(%o4) $\frac{\left(3\,x^2-1\right)^3}{18}$

(%i5) `integrate(x*(5-7*x^2)^2,x);`

(%o5) $-\frac{\left(5-7\,x^2\right)^3}{42}$

(%i6) `integrate(x*(3-2*x^2),x);`

(%o6) $-\frac{\left(3-2\,x^2\right)^2}{8}$

(%i7)

Die Vorgangsweise bei Extremwertaufgaben (die nach wie vor sehr interessant sind) hat sich auch verändert.

Analysis: Extremwerte (eine sehr bekannte Extremwertaufgabe)

```
(%i1) NB:x+y=10;
(%o1) y + x = 10
(%i2) NB:NB-x;
(%o2) y = 10 - x
(%i3) "***************************************************"$
(%i4) HB:x^2+y^2;
(%o4) y^2 + x^2
(%i7) HB,y=10-x;
(%o7) x^2 + (10 - x)^2
(%i8) "***************************************************"$
(%i10) f(x):=x^2+(10-x)^2;
(%o10) f(x) := x^2 + (10 - x)^2
(%i11) ab:diff(f(x),x);
(%o11) 2 x - 2 (10 - x)
(%i12) solve(ab=0,x);
(%o12) [ x = 5 ]
(%i14) y,x=5;
(%o14) 5
(%i15) "***************************************************"$
(%i16) f(5);
(%o16) 50
(%i18) ab2:diff(f(x),x,2);
(%o18) 4
(%i19)
```

Die Zahl 10 soll in zwei Summanden zerlegt werden.

x und y sind die gesuchten Summanden

NB ist die Nebenbedingung, die Eliminierung einer Variablen ermöglicht

Die Summe der Quadrate dieser Summanden soll ein Minimum werden.

wichtiger Hinweis: in der Sekundarstufe II behandeln wir die Differentialrechnung in einer Variablen

(9,1) -> 81 + 1
(8,2) -> 64 + 4
(7,3) -> 49 + 9
(6,4) -> 36 + 16
(5,5) -> 50
(4,6) -> 16 + 36
...

(das wäre eine Lösung durch Probieren)

Nullsetzen der ersten Ableitung, Die horizontale Tangente als notwendige Bedingung.

Wenn die zweite Ableitung an der kritische Stelle > 0 ist, liegt ein Minimum vor.

Merke: eine quadratische Funktion hat entweder
* ein Maximum oder
* ein Minimum

Analysis: eine sehr bekannte Extremwertaufgabe (Ablaufplan)

Maxima-Übung: Die Zahl 10 soll in zwei Summanden zerlegt werden, sodass die Summe der Quadrate dieser Summanden ein Minimum wird

- Hauptbedingung
  - Soll ein Minimum werden

    `HB:x^2+y^2;`

    $y^2 + x^2$
  - Eine Variable mit Hilfe der Nebenbedingung eliminieren

    `HB,y=10-x;`

    $x^2 + (10 - x)^2$
- Nebenbedingung
  - Die Zahl 10 soll in 2 Summanden zerlegt werden

    `NB:x+y=10;`

    $y + x = 10$
  - Damit kann man aus der Hauptbedingung eine Variable eliminieren

    `NB:NB-x;`

    $y = 10 - x$
- Extremwertaufgabe
  - Das ist die Zielfunktion (in einer Variablen)

    `f(x):=x^2+(10-x)^2;`

    $f(x) := x^2 + (10 - x)^2$
  - Man muss die erste Ableitung bilden und NULL setzen

    `ab:diff(f(x),x);`

    $2\,x - 2\,(10 - x)$
  - Der erste Summand ist 5

    `solve(ab=0,x);`

    $[\,x = 5\,]$
  - weitere Ergebnisse
    - Der zweite Summand ist auch 5

      `y,x=5;`

      5
    - Die Summe der Quadrate ist 50

      `f(5);`

      50
  - Wenn die zweite Ableitung größer als NULL ist, liegt ein Minimum vor

    `ab2:diff(f(x),x,2);`

    4

(%i1) "
Die Zahl 10 soll in 2 Summanden x und y zerlegt werden, sodass
a) die Summe der Quadrate der Summanden ein Minimum wird,
b) das Produkt der Summanden ein Maximum wird,
c) die Summe der Kuben der Summanden ein Minimum wird"$

(%i2) "=="$

(%i3) " Nebenbedingung "$

(%i4) "=="$

(%i5) NB:x+y=10;

(%o5) $y + x = 10$

(%i6) solve(NB,y);

(%o6) $[\, y = 10 - x \,]$

(%i7) y(x):=10-x;

(%o7) $y(x) := 10 - x$

(%i8) "=="$

(%i11) HBA(x):=x^2+y(x)^2;

(%o11) $HBA(x) := x^2 + y(x)^2$

(%i12) diff(HBA(x),x);

(%o12) $2\, x - 2\, (10 - x)$

(%i13) solve(%=0,x);

(%o13) $[\, x = 5 \,]$

(%i15) y(5);

(%o15) 5

(%i16) HBA(5);

(%o16) 50

(%i17) "=="$

(%i18) " Lösung von Aufgabe a) "$

(%i22) " x = 5 "$

(%i23) " y = 5 "$

(%i24) " Summe der Quadrate = 50 "$

(%i25) "=="$

(%i26) HBB(x):=x*y(x);

(%o26) $HBB(x) := x\, y(x)$

(%i27) diff(HBB(x),x);

(%o27) $10 - 2\, x$

(%i28) solve(%=0,x);

(%o28) $[\, x = 5 \,]$

(%i29) y(5);

(%o29) 5

(%i30) `HBB(5);`

(%o30) 25

(%i31) `"==============================================="$`

(%i32) `" Lösung von Aufgabe b)                         "$`

(%i33) `"==============================================="$`

(%i34) `HBC(x):=x^3+y(x)^3;`

(%o34) $HBC\left(x\right) := x^3 + y\left(x\right)^3$

(%i35) `diff(HBC(x),x);`

(%o35) $3\ x^2 - 3\left(10 - x\right)^2$

(%i36) `solve(%=0,x);`

(%o36) $[\ x = 5\ ]$

(%i37) `y(5);`

(%o37) 5

(%i38) `HBC(5);`

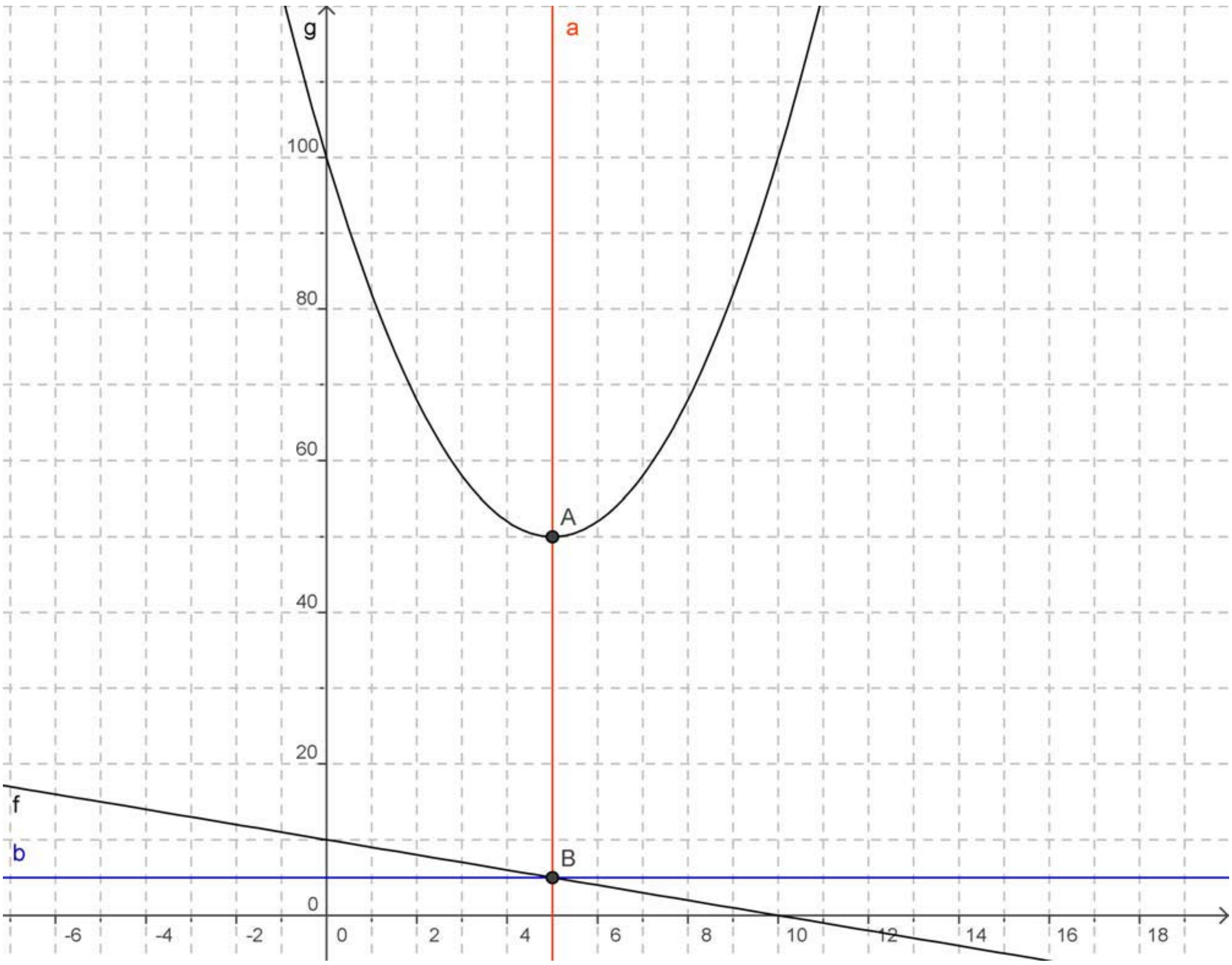
(%o38) 250

(%i39) `"==============================================="$`

(%i40) `" Lösung von Aufgabe c)                         "$`

(%i41) `"==============================================="$`

(%i42)



Das ist die grafische Lösung der Teilaufgabe a

```
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " EINE KURVENDISKUSSION                              "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) f(x):=1/3*x^3-2*x^2+3*x+1;
```

(%o4) $f\left(x\right) := \frac{1}{3}\, x^{3} - 2\, x^{2} + 3\, x + 1$

```
(%i5) solve(f(x)=0,x);
```

Bestimmung der Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse)

(%o5) $$\left[x = \frac{\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{5}{2}\right)^{1/3}} + \left(\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{5}{2}\right)^{1/3} \left(-\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2 \,,\; x = \left(\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{5}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{-\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{5}{2}\right)^{1/3}} + 2 \,,\; x = \left(\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{5}{2}\right)^{1/3} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{5}{2}\right)^{1/3}} + 2 \right]$$

```
(%i6) %,numer;
```

(%o6) [x = - 1.685844141131654 9 (0.8660254037844386 %i - 0.5) - 0.5931746450349383 3 (- 0.8660254037844386 %i - 0.5) + 2 , x = - 0.5931746450349383 3 (0.8660254037844386 %i - 0.5) - 1.685844141131654 9 (- 0.8660254037844386 %i - 0.5) + 2 , x = - 0.2790187861665932 6]

```
(%i7) "****************************************************"$
(%i8) " Es gibt eine Nullstelle                            "$
(%i9) "****************************************************"$
(%i10) ab:diff(f(x),x);
```

Bestimmung der Extremwerte

(%o10) $x^{2} - 4\, x + 3$

```
(%i11) solve(ab=0,x);
```

notwendige Bedingung: die erste Ableitung muss NULL sein

(%o11) $[\, x = 3 \,,\; x = 1 \,]$

```
(%i12) f(3);
```

(%o12) 1

```
(%i13) f(1);
```

(%o13) $\frac{7}{3}$

```
(%i14) ab2:diff(f(x),x,2);
```

(%o14) $2\, x - 4$

```
(%i15) ab2,x=3;
```

(%o15) 2

```
(%i16) ab2,x=1;
```

(%o16) -2

```
(%i17) "****************************************************"$
(%i18) " MIN(3,1) und MAX(1,7/3)                           "$
```

```
(%i19) "*****************************************************"$
(%i20) solve(ab2=0,x);
(%o20) [ x = 2 ]
(%i21) f(2);
(%o21) 5/3
(%i22) "*****************************************************"$
(%i23) "  WP(2,5/3)                                          "$
(%i24) "*****************************************************"$
(%i25)
```

Bestimmung von Wendepunkten

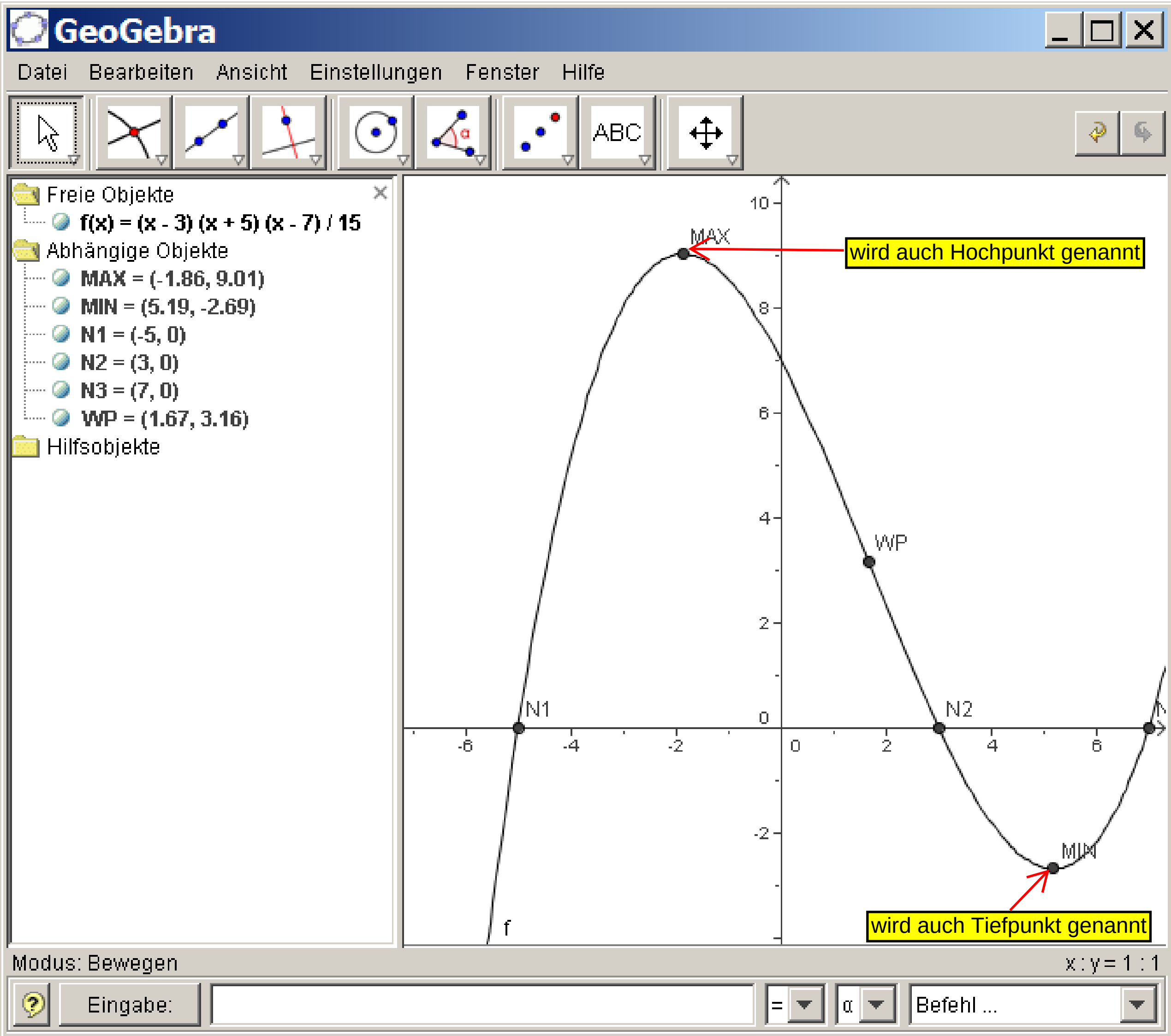
Bei einer Kurvendiskussion bestimmt man mindestens:

1.) Nullstellen

2.) Extremwerte

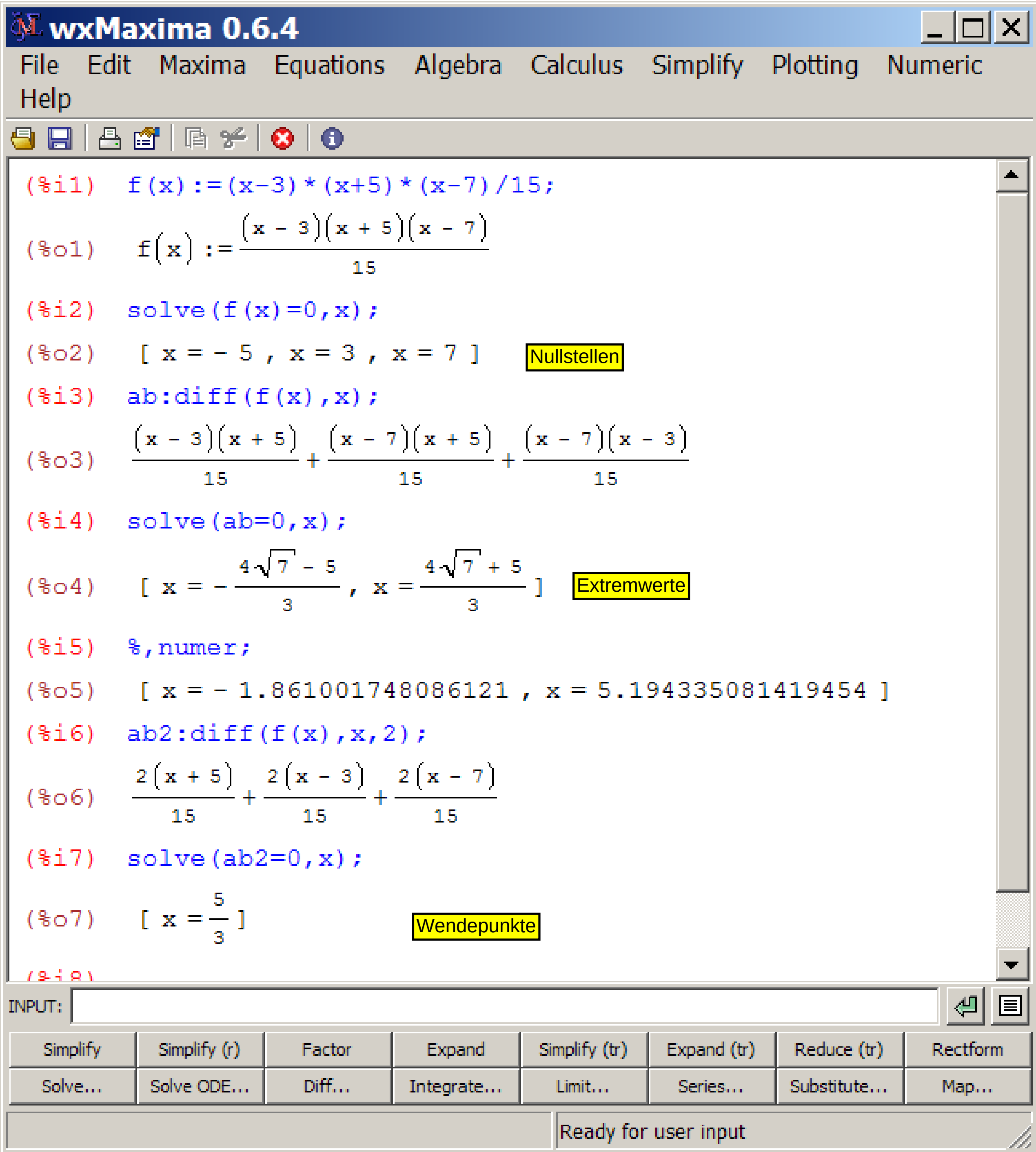
3.) Wendepunkte

Kontrolle der Kurvendiskussion



Kontrolle der Kurvendiskussion mit Maxima

Wir kontrollieren diese Kurvendiskussion mit Maxima:



```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "**************************************************************"$
(%i2) " Kosten- und Preistheorie "$
(%i3) "**************************************************************"$
(%i4) K(x):=x^2+8*x+25;
```

(%o4) $K(x) := x^2 + 8\,x + 25$ Gesamtkostenfunktion

```
(%i5) "**************************************************************"$
(%i7) " Gegeben ist also eine quadratische Kostenfunktion "$
(%i8) "**************************************************************"$
(%i9) DK(x):=K(x)/x;
```

Durchschnittskostenfunktion

(%o9) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

```
(%i10)
"**************************************************************"$
(%i11) " Durchschnittskosten = Stückkosten "$
(%i12)
"**************************************************************"$
(%i13) ab:diff(DK(x),x);
```

Ableitung der Durchschnittskosten

(%o13) $\frac{2\,x + 8}{x} - \frac{x^2 + 8\,x + 25}{x^2}$

```
(%i14) solve(ab=0,x);
```

(%o14) $[\,x = -5\,,\,x = 5\,]$

das Betriebsoptimum ist jene Produktionsmenge, bei der die Durchschnittskosten am kleinsten sind

```
(%i15)
"**************************************************************"$
(%i16) " Das Betriebsoptimum ist x=5 "$
(%i17)
"**************************************************************"$
(%i18) DK(5);
(%o18) 18
```

das ist die langfristige Preisuntergrenze (das Minimum der Durchschnittskosten)

```
(%i19)
"**************************************************************"$
(%i20) " Das Minimum der Durchschnittskosten ist 18 "$
(%i21)
"**************************************************************"$
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Betriebsoptimum: Kostenfunktion dritten Grades "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) K(x):=0.001*x^3+0.5*x^2+10*x+1000;
```

(%o4) $K(x) := 0.001\,x^3 + 0.5\,x^2 + 10\,x + 1000$

```
(%i5) DK(x):=K(x)/x;
```

(%o5) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

der bekannte Anzeigefehler der verwendeten WXMAXIMA-Version

```
(%i6) ab:diff(DK(x),x);
```

(%o6) $\frac{0.0030000000000000001\,x^2 + x + 10}{x} - \frac{0.001\,x^3 + 0.5\,x^2 + 10\,x + 1000}{x^2}$

```
(%i7) solve(ab=0,x);
RAT replaced 0.003 by 3//1000 = 0.003
RAT replaced 0.5 by 1//2 = 0.5
RAT replaced 0.001 by 1//1000 = 0.001
```

(%o7) $[\,x = -100\sqrt{2} - 100\,,\ x = 100\sqrt{2} - 100\,,\ x = -50\,]$

```
(%i8) %,numer;
```

(%o8) $[\,x = -241.42135623730951\,,\ x = 41.42135623730951\,,\ x = -50\,]$

```
(%i9) "****************************************************"$
(%i10) " Das Betriebsoptimum ist 41 "$
```

die anderen Werte sind unzulässig (und theoretisch Stellen eines Maximums)

```
(%i11) "****************************************************"$
(%i12) DK(41);
(%o12) 56.571243902439029
(%i13) "****************************************************"$
(%i14) " Die langfristige Preisuntergrenze ist 56,57 "$
(%i15) "****************************************************"$
(%i16)
```

die langfristige Preisuntergrenze ist identisch mit dem Minimum der Stückkosten (Durchschnittskosten)

Die Kosten- und Preistheorie lässt sich mit Maxima sehr übersichtlich darstellen.

(%i1) `K(x):=0.1*x^3-1.2*x^2+4.9*x+4;`

(%o1) $K(x) := 0.1\ x^3 - 1.2\ x^2 + 4.9\ x + 4$

(%i2) `DK(x):=K(x)/x;`

(%o2) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$ Durchschnittskosten oder Stückkosten

(%i3) `DK(x);`

(%o3) $\frac{0.1\ x^3 - 1.2\ x^2 + 4.9\ x + 4}{x}$

(%i4) `ab:diff(DK(x),x);`

(%o4) $\frac{0.3\ x^2 - 2.4\ x + 4.9}{x} - \frac{0.1\ x^3 - 1.2\ x^2 + 4.9\ x + 4}{x^2}$

(%i5) `solve(ab=0,x);`

```
`rat' replaced 4.9 by 49//10 = 4.9
`rat' replaced -2.4 by -12//5 = -2.4
`rat' replaced 0.3 by 3//10 = 0.3
`rat' replaced 4.9 by 49//10 = 4.9
`rat' replaced -1.2 by -6//5 = -1.2
`rat' replaced 0.1 by 1//10 = 0.1
```

(%o5) $\left[\ x = \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}\ \%i}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\left(2\sqrt{65} + 18\right)^{1/3}} + \left(2\sqrt{65} + 18\right)^{1/3}\left(-\frac{\sqrt{3}\ \%i}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2\ ,\ x = \left(2\sqrt{65} + 18\right)^{1/3}\left(\frac{\sqrt{3}\ \%i}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{4\left(-\frac{\sqrt{3}\ \%i}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\left(2\sqrt{65} + 18\right)^{1/3}} + 2\ ,\ x = \left(2\sqrt{65} + 18\right)^{1/3} + \frac{4}{\left(2\sqrt{65} + 18\right)^{1/3}} + 2\ \right]$

(%i6) `%,numer;`

(%o6) $[\ x = 1.233212240297381\,(0.86602540378444\ \%i - 0.5) + 3.243561707622547\,(-\ 0.86602540378444\ \%i - 0.5) + 2\ ,\ x = 3.243561707622547\,(0.86602540378444\ \%i - 0.5) + 1.233212240297381\,(-\ 0.86602540378444\ \%i - 0.5) + 2\ ,\ x = 6.476773947919929\ ]$

(%i7) `xBO:6.5;`

(%o7) 6.5

(%i8) `DK(xBO);` Wenn man das Betriebsoptimum einsetzt, erhält man das Minimum der Stückkosten, dass ist dann die langfristige Preis-untergrenze.

(%o8) 1.940384615384617

(%i9) `"==================================================="$`

(%i10) `" Die langfrisitge Preisuntergrenze ist 1,94     "$`

(%i11) `"==================================================="$`

(%i12)

```
(%i1)  "=============================================="$
(%i2)  " Kostenfunktion                                "$
(%i3)  "=============================================="$
(%i4)  x:[10,20,30,40];
(%o4)  [ 10 , 20 , 30 , 40 ]
(%i5)  K:0.1*x^3-0.5*x^2+5*x+1000;
(%o5)  [ 1100.0 , 1700.0 , 3400.0 , 6800.0 ]
(%i6)  "=============================================="$
(%i7)  g(x,K):=K=a*x^3+b*x^2+c*x+d;
```

(%o7) $g(x, K) := K = a\ x^3 + b\ x^2 + c\ x + d$

```
(%i8)  "=============================================="$
(%i9)  g1:g(x[1],K[1]);
(%o9)  1100.0 = d + 10 c + 100 b + 1000 a
(%i10)  g2:g(x[2],K[2]);
(%o10)  1700.0 = d + 20 c + 400 b + 8000 a
(%i11)  g3:g(x[3],K[3]);
(%o11)  3400.0 = d + 30 c + 900 b + 27000 a
(%i12)  g4:g(x[4],K[4]);
(%o12)  6800.0 = d + 40 c + 1600 b + 64000 a
(%i13)  "=============================================="$
(%i14)  solve([g1,g2,g3,g4],[a,b,c,d]);
`rat' replaced 1100.0 by 1100//1 = 1100.0
`rat' replaced 1700.0 by 1700//1 = 1700.0
`rat' replaced 3400.0 by 3400//1 = 3400.0
`rat' replaced 6800.0 by 6800//1 = 6800.0
```

(%o14) $[\ [\ a = \frac{1}{10}\ ,\ b = -\frac{1}{2}\ ,\ c = 5\ ,\ d = 1000\ ]\ ]$

```
(%i15)  algsys([g1,g2,g3,g4],[a,b,c,d]);
```

(%o15) $[\ [\ a = \frac{1}{10}\ ,\ b = -\frac{1}{2}\ ,\ c = 5\ ,\ d = 1000\ ]\ ]$

```
(%i16)  "=============================================="$
(%i17)  K(x):=1/10*x^3-1/2*x^2+5*x+1000;
```

(%o17) $K(x) := \frac{1}{10}\ x^3 - \frac{1}{2}\ x^2 + 5\ x + 1000$

```
(%i20)  kill(x);
(%o20)  done
(%i21)  DK(x):=K(x)/x;
```

(%o21) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

```
(%i22)  ab:diff(DK(x),x);
```

(%o22) $$\frac{\frac{3x^2}{10}-x+5}{x}-\frac{\frac{x^3}{10}-\frac{x^2}{2}+5x+1000}{x^2}$$

(%i24) `realroots(ab=0);`

(%o24) $$[x=\frac{603141595}{33554432}]$$

(%i25) `%,numer;`

(%o25) $[x=17.97502025961876]$

(%i28) `"================================================"$`

(%i29) `" Das Betriebsoptimum ist 17,98                    "$`

(%i30) `"================================================"$`

(%i31) `DK(17.98);`

(%o31) 83.95539261401557

(%i32) `"================================================"$`

(%i33) `" Die langfristige Preisuntergrenze ist 83.96   "$`

(%i34) `"================================================"$`

(%i35)

```
(%i1) "=================================================="$
(%i2) " Langfristige und kurzfristige Preisuntergrenze"$
(%i3) "=================================================="$
(%i4) Kv(x):=0.1*x^3-1.2*x^2+4.9*x;
```

(%o4) $Kv(x) := 0.1\ x^3 - 1.2\ x^2 + 4.9\ x$ das sind nur die variablen Kosten

```
(%i5) F:4;
```

(%o5) 4

```
(%i6) K(x):=Kv(x)+F;
```

(%o6) $K(x) := Kv(x) + F$

```
(%i7) K(x);
```

(%o7) $0.1\ x^3 - 1.2\ x^2 + 4.9\ x + 4$

```
(%i8) "=================================================="$
(%i9) DK(x):=K(x)/x;
```

(%o9) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

```
(%i10) ab:diff(DK(x),x);
```

(%o10) $\frac{0.3\ x^2 - 2.4\ x + 4.9}{x} - \frac{0.1\ x^3 - 1.2\ x^2 + 4.9\ x + 4}{x^2}$

```
(%i11) solve(ab=0,x),numer;
`rat' replaced 4.9 by 49//10 = 4.9
`rat' replaced -2.4 by -12//5 = -2.4
`rat' replaced 0.3 by 3//10 = 0.3
`rat' replaced 4.9 by 49//10 = 4.9
`rat' replaced -1.2 by -6//5 = -1.2
`rat' replaced 0.1 by 1//10 = 0.1
`rat' replaced 4.9 by 49//10 = 4.9
`rat' replaced -2.4 by -12//5 = -2.4
`rat' replaced 0.3 by 3//10 = 0.3
`rat' replaced 4.9 by 49//10 = 4.9
`rat' replaced -1.2 by -6//5 = -1.2
`rat' replaced 0.1 by 1//10 = 0.1
`rat' replaced 0.2 by 1//5 = 0.2
```

(%o11) $[\ x = 1.233212240297381\ (0.86602540378444\ \%i - 0.5) + 3.243561707622547\ (- 0.86602540378444\ \%i - 0.5) + 2.0\ ,\ x = 3.243561707622547\ (0.86602540378444\ \%i - 0.5) + 1.233212240297381\ (- 0.86602540378444\ \%i - 0.5) + 2.0\ ,\ x = 6.476773947919928\ ]$

```
(%i12) DK(6.5);
```

(%o12) 1.940384615384617

```
(%i13) "=================================================="$
(%i14) " Die langfristige Preisuntergrenze ist         "$
```

```
(%i16) " ungefähr 2                                        "$
(%i17) "=================================================="$
(%i18) DKv(x):=Kv(x)/x;
```

(%o18) $DKv(x) := \frac{Kv(x)}{x}$

```
(%i19) DKv(x);
```

(%o19) $\frac{0.1\ x^3 - 1.2\ x^2 + 4.9\ x}{x}$

```
(%i20) "=================================================="$
(%i21) ab:diff(DKv(x),x);
```

(%o21) $\frac{0.3\ x^2 - 2.4\ x + 4.9}{x} - \frac{0.1\ x^3 - 1.2\ x^2 + 4.9\ x}{x^2}$

```
(%i22) solve(ab=0,x),numer;
`rat' replaced 4.9 by 49//10 = 4.9
`rat' replaced -2.4 by -12//5 = -2.4
`rat' replaced 0.3 by 3//10 = 0.3
`rat' replaced 4.9 by 49//10 = 4.9
`rat' replaced -1.2 by -6//5 = -1.2
`rat' replaced 0.1 by 1//10 = 0.1
`rat' replaced 4.9 by 49//10 = 4.9
`rat' replaced -2.4 by -12//5 = -2.4
`rat' replaced 0.3 by 3//10 = 0.3
`rat' replaced 4.9 by 49//10 = 4.9
`rat' replaced -1.2 by -6//5 = -1.2
`rat' replaced 0.1 by 1//10 = 0.1
`rat' replaced 0.2 by 1//5 = 0.2
```

(%o22) $[\ x = 6\ ]$

```
(%i23) DKv(6);
(%o23) 1.300000000000001
(%i24) "=================================================="$
(%i25) " Die kurzfristige Preisuntergrenze ist 1.3        "$
(%i26) "=================================================="$
```

(%i27) Das Minimum der durchschnittlichen variablen Kosten ist die kurzfristige Preisuntergrenze.

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Grenzkosten = Durchschnittskosten (Betriebsoptimum)"$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) K(x):=x^2+8*x+36;
```

(%o4) $K(x) := x^2 + 8\ x + 36$

```
(%i5) GK(x):=diff(K(x),x);
```

(%o5) $GK(x) := DIFF(K(x), x)$

```
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) " Grenzkosten = Ableitung der Kosten                 "$
(%i8) "**************************************************"$
(%i9) DK(x):=K(x)/x;
```

(%o9) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

Im Betriebsoptimum schneiden sich Grenzkosten und Durchschnittskosten

```
(%i10) g:GK(x)=DK(x);
```

(%o10) $2\ x + 8 = \frac{x^2 + 8\ x + 36}{x}$

```
(%i11) solve(g,x);
(%o11) [ x = - 6 , x = 6 ]
(%i12) "**************************************************"$
(%i13) " Das Betriebsoptimum ist x=6                        "$
(%i14) "**************************************************"$
(%i15)
```

Anmerkung: das Betriebsoptimum ist jene Produktionsmenge, bei der die Durchschnittskosten am kleinsten werden.

```
(%i1) K(x):=0.1*x^3-1.2*x^2+4.9*x+4;
```

(%o1) $K(x) := 0.1\ x^3 - 1.2\ x^2 + 4.9\ x + 4$

```
(%i2) ab2:diff(K(x),x,2);
```

(%o2) $0.6\ x - 2.4$

```
(%i3) solve(ab2=0,x);
`rat' replaced -2.4 by -12//5 = -2.4
`rat' replaced 0.6 by 3//5 = 0.6
```

(%o3) $[\ x = 4\ ]$

```
(%i4) "================================================"$
(%i5) " Für x=4 gibt es den kleinsten                  "$
(%i6) " Kostenzuwachs (Kostenkehre, Minimum            "$
(%i7) " der Grenzkosten)                               "$
(%i8) "================================================"$
```

(%i9) Die Kostenkehre ist der Wendepunkt der Kostenkurve.

```
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Quadratische Nachfragefunktion:                    "$
(%i3) " Für einen Preis von p=5 € wird ein Absatz von 1000 "$
(%i4) " Stück erwartet. Die Sättigungsmenge ist 5000 Stück."$
(%i5) " Die Preisobergrenze ist 10 €                       "$
(%i6) " Bestimme eine quadratische Nachfragefunktion!      "$
(%i7) "****************************************************"$
(%i8) x1:1000;
(%o8) 1000
(%i9) p1:5;
(%o9) 5
(%i10) x2:5000;
(%o10) 5000
(%i11) p2:0;
(%o11) 0
(%i12) x3:0;
(%o12) 0
(%i13) p3:10;
(%o13) 10
(%i14) "****************************************************"$
(%i15) g(x,p):=p=a*x^2+b*x+c;
```

(%o15) $g(x, p) := p = a\,x^2 + b\,x + c$

```
(%i16) g1:g(x1,p1);
```

(%o16) $5 = c + 1000\,b + 1000000\,a$

```
(%i17) g2:g(x2,p2);
```

(%o17) $0 = c + 5000\,b + 25000000\,a$

```
(%i18) g3:g(x3,p3);
```

(%o18) $10 = c$

```
(%i19) "****************************************************"$
(%i20) solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);
```

(%o20) $[\,[\,a = \frac{3}{4000000}, b = -\frac{23}{4000}, c = 10\,]\,]$

```
(%i21) "****************************************************"$
(%i22) p(x):=3/4000000*x^2-23/4000*x+10;
```

(%o22) $p(x) := \frac{3}{4000000}x^2 - \frac{23}{4000}x + 10$

```
(%i23) "****************************************************"$
(%i24) U(x):=p(x)*x;
```

(%o24) $U(x) := p(x)\,x$

Koordinaten des ersten Punktes

Koordinaten des zweiten Punktes

Koordinaten des dritten Punktes

Ansatz. quadratische Funktion

Punkte einsetzen

Gleichungssystem lösen

die gefundene Nachfragefunktion

Anmerkung: eine normale Nachfragefunktion ist (streng) monoton fallend

(%i26) `ab:diff(U(x),x);`

(%o26) $$\frac{3\ x^2}{4000000} + \left(\frac{3\ x}{2000000} - \frac{23}{4000}\right) x - \frac{23\ x}{4000} + 10$$

(%i27) `solve(ab=0,x);`

(%o27) $$[\ x = \frac{10000}{9}\ ,\ x = 4000\ ]$$

(%i29) `ab2:diff(U(x),x,2);`

(%o29) $$\frac{9\ x}{2000000} - \frac{23}{2000}$$

(%i30) `ab2,x=4000;`

(%o30) $$\frac{13}{2000}$$

(%i31) `ab2,x=10000/9;`

das ist die umsatzmaximale Menge, weil die zweite Ableitung < 0 ist

(%o31) $$-\frac{13}{2000}$$

(%i32) `p(10000/9);`

(%o32) $$\frac{245}{54}$$

das ist der umsatzmaximale Preis

(%i33) `%,numer;`

(%o33) 4.537037037037037

(%i34) `"****************************************************"$`

(%i35) `" Der optimale Preis ist 4,54 €                        "$`

(%i36) `"****************************************************"$`

(%i37) `U(10000/9);`

(%o37) $$\frac{1225000}{243}$$

das ist der maximale Umsatz

(%i38) `%,numer;`

(%o38) 5041.1522633744853

(%i39) `"****************************************************"$`

(%i40) `" Der optimale Umsatz ist 5.041,15                     "$`

(%i41) `"****************************************************"$`

(%i42) `U(4000);`

(%o42) -4000

(%i43) `solve(p(x)=0,x);`

(%o43) $$[\ x = \frac{8000}{3}\ ,\ x = 5000\ ]$$

(%i44) `%,numer;`

(%o44) [x = 2666.666666666665 , x = 5000]

(%i47) `" DIESER BEREICH HAT KEINEN PRAKTISCHEN SINN           "$`

(%i48) `"====================================================="$`

Gleichungssystem: Parabel durch 3 Punkte

```
(%i1) "=======================================================$"
(%i2) " X            1          2          -1                 "$
(%i3) "-------------------------------------------------------"$
(%i4) " Y            -8         -12        -18                "$
(%i5) "======================================================="$
(%i6) " Bestimme die Parabel durch diese Punkte               "$
(%i7) x1:1;
(%o7)  1
(%i8) y1:-8;
(%o8)  - 8
(%i9) x2:2;
(%o9)  2
(%i10) y2:-12;
(%o10)  - 12
(%i11) x3:-1;
(%o11)  - 1
(%i12) y3:-18;
(%o12)  - 18
(%i13) g(x,y):=y=a*x^2+b*x+c;
(%o13)  g(x , y) := y = a x^2 + b x + c
(%i14) g1:g(x1,y1);
(%o14)  - 8 = c + b + a
(%i15) g2:g(x2,y2);
(%o15)  - 12 = c + 2 b + 4 a
(%i16) g3:g(x3,y3);
(%o16)  - 18 = c - b + a
(%i17) solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);
(%o17)  [ [ a = - 3 , b = 5 , c = - 10 ] ]
(%i18) y=-3*x^2+5*x-10;
(%o18)  y = - 3 x^2 + 5 x - 10
(%i20) "======================================================="$
(%i21) " Das ist die gesuchte Parabel                          "$
(%i22) "======================================================="$
(%i23)
```

Eine häufige und auch sinnvolle Fragestellung

Gleichungssystem

Analysis: im Betriebsoptimum gilt Grenzkosten = Stückkosten

(%i1) "**"$

(%i2) " Kosten- und Preistheorie "$

(%i3) "**"$

(%i4) K(x):=1/1000*x^3+1/2*x^2+10*x+1000;

(%o4) $$K(x) := \frac{1}{1000}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 10x + 1000$$

(%i5) "**"$

(%i6) " Berechnung der Grenzkosten "$

(%i7) "**"$

(%i8) GK:diff(K(x),x);

(%o8) $$\frac{3x^2}{1000} + x + 10$$

(%i9) "**"$

(%i10) " Berechnung der Stückkosten "$

(%i11) "**"$

(%i12) DK(x):=K(x)/x;

(%o12) $$DK(x) := \frac{K(x)}{x}$$

Stückkosten = Gesamtkosten / Menge

(%i13) DK(x);

(%o13) $$\frac{\frac{x^3}{1000} + \frac{x^2}{2} + 10x + 1000}{x}$$

(%i14) "**"$

(%i15) g:GK=DK(x);

die Lösung dieser Gleichung ist das Betriebsoptimum

(%o15) $$\frac{3x^2}{1000} + x + 10 = \frac{\frac{x^3}{1000} + \frac{x^2}{2} + 10x + 1000}{x}$$

(%i16) solve(g,x);

(%o16) $$[x = -100\sqrt{2} - 100, x = 100\sqrt{2} - 100, x = -50]$$

(%i17) "**"$

(%i18) ab:diff(DK(x),x);

(%o18) $$\frac{\frac{3x^2}{1000} + x + 10}{x} - \frac{\frac{x^3}{1000} + \frac{x^2}{2} + 10x + 1000}{x^2}$$

(%i19) solve(ab=0,x);

(%o19) $$[x = -100\sqrt{2} - 100, x = 100\sqrt{2} - 100, x = -50]$$

(%i20) "**"$

(%i21) " Das Betriebsoptimum ist ungefähr 41 (warum?) "$

(%i22) "**"$

(%i23) Antwort: weil nur die zweite Lösung in Frage kommt

(%i1) "==="$

(%i2) " Betriebsoptimum "$

(%i3) "==="$

(%i4) K(x):=0.05*x^2+20*x+312500;

(%o4) $K(x) := 0.05\ x^2 + 20\ x + 312500$ Kostenfunktion

(%i5) DK(x):=K(x)/x;

(%o5) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$ Durchschnittskosten

(%i6) DK(x);

(%o6) $\frac{0.05\ x^2 + 20\ x + 312500}{x}$

(%i7) ab:diff(DK(x),x);

die Durchschnittskosten sollen ein Minimum werden, daher muss man die erste Ableitung bestimmen

(%o7) $\frac{0.1\ x + 20}{x} - \frac{0.05\ x^2 + 20\ x + 312500}{x^2}$

(%i8) solve(ab=0,x);

die erste Ableitung muss man NULL setzen

`rat' replaced 0.1 by 1//10 = 0.1
`rat' replaced 0.05 by 1//20 = 0.05

(%o8) $[\ x = -\ 2500\ ,\ x = 2500\ ]$

(%i9) "==="$

(%i11) " Das ist das Betriebsoptimum "$

(%i12) "==="$

(%i13) DK(2500);

wenn man das Betriebsoptimum einsetzt, erhält man das Minimum der Durchschnittskosten

(%o13) 270.0

(%i14) "==="$

(%i15) " Das ist das Minimum der Stückkosten "$

(%i16) " = langfristige Preisuntergrenze "$

(%i17) "==="$

(%i18) Anmerkung: warum ist diese Behauptung logisch?

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Grenzwerte von Funktionen "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) f(x):=(exp(x^2/2)-1)/x^2;
```

(%o4) $f(x) := \dfrac{\mathrm{EXP}\left(\dfrac{x^2}{2}\right) - 1}{x^2}$

```
(%i5) limit(f(x),x,0);
```

limit = limes = Grenzwert   Grenzwert für x gegen NULL

(%o5) $\dfrac{1}{2}$

```
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) f(x):=(exp(x^2)-1)/x^2;
```

(%o7) $f(x) := \dfrac{\mathrm{EXP}\left(x^2\right) - 1}{x^2}$

```
(%i8) limit(f(x),x,0);
(%o8) 1
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) f(x):=(sin(2*x)/x)^5;
```

(%o10) $f(x) := \left(\dfrac{\sin(2\ x)}{x}\right)^5$

```
(%i11) limit(f(x),x,0);
(%o11) 32
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) f(x):=log(1+4*x+x^2)/x;
```

(%o13) $f(x) := \dfrac{\log\left(1 + 4\ x + x^2\right)}{x}$

```
(%i14) limit(f(x),x,0);
(%o14) 4
(%i15) "*****************************************************"$
(%i16)
```

```
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Lineare Abschreibung                              "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) " B ... Buchwert nach n Jahren                      "$
(%i5) " A ... Anschaffungswert                            "$
(%i6) " n ... Nutzungsdauer                               "$
(%i7) " x ... Anzahl der Jahre                            "$
(%i8) "****************************************************"$
(%i9) B(x):=A-A/n*x;
```

(%o9) $B\left(x\right) := A - \frac{A}{n}\,x$ Funktion der linearen Abschreibung

```
(%i10) "****************************************************"$
(%i14) Abschreibung:B=A-A/n*x;
```

(%o14) $B = A - \frac{A\ x}{n}$

```
(%i15) "****************************************************"$
(%i16) solve(Abschreibung,A);
```

(%o16) $[\ A = - \frac{B\ n}{x - n}\ ]$

```
(%i17) "****************************************************"$
(%i18) " Formel für den Anschaffungswert                   "$
(%i19) "****************************************************"$
(%i20) solve(Abschreibung,n);
```

(%o20) $[\ n = - \frac{A\ x}{B - A}\ ]$

```
(%i21) "****************************************************"$
(%i22) " Formel für die Nutzungsdauer                      "$
(%i23) "****************************************************"$
(%i24) solve(Abschreibung,x);
```

(%o24) $[\ x = - \frac{\left(B - A\right)\ n}{A}\ ]$

```
(%i25) "****************************************************"$
(%i26) " Formel für die Anzahl der Jahre                   "$
(%i27) "****************************************************"$
(%i28)
```

(%i1) "***"$

(%i2) " Bestimme die Schnittpunkte der Polynomfunktionen   "$

(%i3) "***"$

(%i4) f(x):=2*x^2-3*x+2;

(%o4) $f(x) := 2\,x^2 - 3\,x + 2$ erste Polynomfunktion

beide Beispiele sind Parabeln

(%i5) g(x):=x^2-4*x+4;

(%o5) $g(x) := x^2 - 4\,x + 4$ zweite Polynomfunktion

(%i6) solve(f(x)=g(x),x);

(%o6) $[\,x = 1\,,\,x = -2\,]$

(%i7) f(1);

(%o7) 1

(%i8) f(-2);

(%o8) 16

(%i9) "***"$

(%i10) " P1(1,1), P2(-2,16)   "$

(%i11) "***"$

(%i12) f(x):=x^2-4*x+3;

(%o12) $f(x) := x^2 - 4\,x + 3$

(%i13) g(x):=-x^2+x+1;

(%o13) $g(x) := -x^2 + x + 1$

(%i14) solve(f(x)=g(x),x);

(%o14) $[\,x = 2\,,\,x = \frac{1}{2}\,]$

(%i15) f(2);

(%o15) -1

(%i16) f(1/2);

(%o16) $\frac{5}{4}$

(%i17) "***"$

(%i18) " Auch hier zwei Punkte: P(2,-1) und Q(1/2,5/4)   "$

(%i19) "***"$

(%i20) f(x):=x^2+6*x+9;

(%o20) $f(x) := x^2 + 6\,x + 9$

(%i21) g(x):=-x^2+5*x+10;

(%o21) $g(x) := -x^2 + 5\,x + 10$

(%i22) solve(f(x)=g(x),x);

(%o22) $[\,x = \frac{1}{2}\,,\,x = -1\,]$

```
(%i23) f(1/2);
```

(%o23) $\frac{49}{4}$

```
(%i24) f(-1);
(%o24) 4
(%i25) "*****************************************************"$
(%i26) " P(1/2,49/4) , Q(-1,4)                              "$
(%i27) "*****************************************************"$
(%i28) f(x):=x^3-x^2+2*x-2;
```

(%o28) $f(x) := x^3 - x^2 + 2\,x - 2$

```
(%i29) g(x):=x^3-2*x^2+3*x;
```

(%o29) $g(x) := x^3 - 2\,x^2 + 3\,x$

```
(%i30) solve(f(x)=g(x),x);
(%o30) [ x = 2 , x = - 1 ]
(%i31) f(2);
(%o31) 6
(%i32) f(-1);
(%o32) - 6
(%i33) "*****************************************************"$
(%i34) " da x^3 aus der Rechnung fällt, gibt es nur 2       "$
(%i36) " Schnittpunkte                                      "$
(%i37) "*****************************************************"$
(%i38)
```

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Bestimmen Sie die Polynomfunktionen                "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) " Polynomfunktion zweiten Grades, deren Graph durch  "$
(%i5) " die Punkte A(-2,3) und B(-1,1.5) verläuft und die  "$
(%i6) " y-Achse bei y=1 schneidet                          "$
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) g(x,y):=y=a*x^2+b*x+c;
```

Wenn man den Ansatz als Funktion schreibt, ist es besonders einfach, einzusetzen

(%o8) $g(x, y) := y = a x^2 + b x + c$

```
(%i9) x1:-2;
```

(%o9) -2

solche Aufgaben behandelt man unter dem Thema "umgekehrte Kurvendiskussion"

```
(%i10) y1:3;
```

(%o10) 3

```
(%i11) x2:-1;
```

(%o11) -1

```
(%i12) y2:1.5;
```

(%o12) 1.5

```
(%i13) x3:0;
```

(%o13) 0

```
(%i14) y3:1;
```

(%o14) 1

```
(%i15) g1:g(x1,y1);
```

(%o15) $3 = c - 2 b + 4 a$

```
(%i16) g2:g(x2,y2);
```

(%o16) $1.5 = c - b + a$

hier werden die Punkte in die Gleichung eingesetzt

```
(%i17) g3:g(x3,y3);
```

(%o17) $1 = c$

```
(%i18) solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);
```

die Auflösung eines Gleichungssystems ist erforderlich

RAT replaced 1.5 by 3//2 = 1.5

(%o18) $[[a = \frac{1}{2}, b = 0, c = 1]]$

```
(%i19) y=1/2*x^2+1;
```

(%o19) $y = \frac{x^2}{2} + 1$

das ist die gesuchte Funktion

```
(%i20) "*****************************************************"$
(%i21) " Polynomfunktion zweiten Grades, deren Graph        "$
(%i22) " durch die Punkte A(1,1) und B(2,4) verläuft        "$
(%i23) " und die y-Achse bei y=2 schneidet                  "$
(%i24) "*****************************************************"$
```

```
(%i26) x1:1;
(%o26)  1
(%i27) y1:1;
(%o27)  1
(%i28) x2:2;
(%o28)  2
(%i29) y2:4;
(%o29)  4
(%i30) x3:0;
(%o30)  0
(%i31) y3:1;
(%o31)  1
(%i37) g(x,y):=y=a*x^2+b*x+c;
```

Ansatz der Gleichung als Funktion in zwei Variablen macht das Einsetzen von Punkten ganz besonders einfach.

(%o37) $g(x, y) := y = a\,x^2 + b\,x + c$

```
(%i38) g1:g(x1,y1);
(%o38)  1 = c + b + a
(%i39) g2:g(x2,y2);
(%o39)  4 = c + 2 b + 4 a
(%i40) g3:g(x3,y3);
(%o40)  1 = c
(%i41) solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);
```

die Lösung des Gleichungssystems

(%o41) $[\,[a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}, c = 1]\,]$

```
(%i42) y=3/2*x^2-3/2*x+1;
```

(%o42) $y = \frac{3\,x^2}{2} - \frac{3\,x}{2} + 1$

```
(%i43) "*****************************************************"$
(%i44)
```

```
(%i1)  "===================================================="$
(%i2)  " Kurvendiskussion                                   "$
(%i3)  "===================================================="$
(%i4)  x:[10,20,30,40];
(%o4)  [ 10 , 20 , 30 , 40 ]
(%i9)  y:(x-3)*(x+5)*(x-7)*0.05;
(%o9)  [ 15.75 , 276.25 , 1086.75 , 2747.25 ]
```

Wertetabelle

```
(%i10)  "===================================================="$
(%i11)  g(x,y):=y=a*x^3+b*x^2+c*x+d;
```

(%o11) $g(x, y) := y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

```
(%i12)  "===================================================="$
(%i13)  g1:g(x[1],y[1]);
```

(%o13) $15.75 = d + 10\,c + 100\,b + 1000\,a$

```
(%i14)  g2:g(x[2],y[2]);
```

(%o14) $276.25 = d + 20\,c + 400\,b + 8000\,a$

```
(%i15)  g3:g(x[3],y[3]);
```

(%o15) $1086.75 = d + 30\,c + 900\,b + 27000\,a$

```
(%i16)  g4:g(x[4],y[4]);
```

(%o16) $2747.25 = d + 40\,c + 1600\,b + 64000\,a$

```
(%i17)  "===================================================="$
(%i18)  algsys([g1,g2,g3,g4],[a,b,c,d]);
```

(%o18) $\left[\left[a = \frac{1}{20}, b = -\frac{1}{4}, c = -\frac{29}{20}, d = \frac{21}{4}\right]\right]$

```
(%i19)  "===================================================="$
(%i20)  f(x):=1/20*x^3-1/4*x^2-29/20*x+21/4;
```

(%o20) $f(x) := \frac{1}{20}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{-29}{20}\,x + \frac{21}{4}$

```
(%i21)  "===================================================="$
(%i23)  kill(x);
```

(%o23) *done*

```
(%i24)  realroots(f(x));
```

(%o24) $[x = -5, x = 3, x = 7]$

```
(%i25)  "===================================================="$
(%i26)  ab:diff(f(x),x);
```

(%o26) $\frac{3\,x^2}{20} - \frac{x}{2} - \frac{29}{20}$

```
(%i27)  realroots(ab);
```

(%o27) $\left[x = -\frac{62444857}{33554432}, x = \frac{174292963}{33554432}\right]$

```
(%i28) %,numer;
```

(%o28) $[\,x=-1.861001759767532\,,\ x=5.194335073232651\,]$

```
(%i29) f(-1.86);
```

(%o29) 6.7603572

```
(%i30) f(5.19);
```

(%o30) -2.019607049999999

```
(%i31) ab2:diff(ab,x);
```

(%o31) $\frac{3\,x}{10}-\frac{1}{2}$

```
(%i32) ab2,x=-1.86;
```

(%o32) -1.058

```
(%i33) " Maximum "$
(%i34) ab2,x=5.19;
```

(%o34) 1.057

```
(%i35) " Minimum "$
(%i36) "================================================"$
(%i38) realroots(ab2);
```

(%o38) $[\,x=\frac{55924053}{33554432}\,]$

```
(%i39) %,numer;
```

(%o39) $[\,x=1.666666656732559\,]$

```
(%i40) f(1.67);
```

(%o40) 2.36414815

```
(%i41) "================================================"$
(%i42)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Variable in einem Term mit Werten belegen: "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) T1:(x+1)^3;
```

(%o4) $(x+1)^3$

```
(%i5) "*****************************************************"$
(%i6) T1,x=0;
```

Wert des Terms für x = 0

das ist eine wichtige Technik, die Wertbelegung

(%o6) 1

```
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) T1,x=1;
```

Wert des Terms für x = 1

(%o8) 8

```
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) T1,x=2;
```

(%o10) 27

```
(%i11) "*****************************************************"$
(%i12) T1,x=a;
```

es können auch andere Terme für die Wertbelegung verwendet werden

(%o12) $(a+1)^3$

```
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14) T1,x=b;
```

(%o14) $(b+1)^3$

```
(%i15) "*****************************************************"$
(%i16) T1,x=1/y;
```

(%o16) $\left(\frac{1}{y}+1\right)^3$

```
(%i17) "*****************************************************"$
(%i18) T1,x=r+s;
```

(%o18) $(s+r+1)^3$

```
(%i19) "*****************************************************"$
(%i20)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Verkettung von Funktionen "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) u(x):=x+1;
```

(%o4) $u(x) := x + 1$

```
(%i5) f(x):=x^2;
```

(%o5) $f(x) := x^2$

```
(%i6) f(u(x));
```

hier werden zwei Funktionen "verkettet"

(%o6) $(x + 1)^2$

```
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) u(x):=sin(x);
```

(%o8) $u(x) := \sin(x)$

```
(%i9) f(x):=exp(x);
```

(%o9) $f(x) := EXP(x)$

```
(%i10) f(u(x));
```

(%o10) $\%e^{\sin(x)}$

```
(%i11) "*****************************************************"$
(%i12) u(x):=sqrt(x);
```

(%o12) $u(x) := \sqrt{x}$

```
(%i13) f(x):=x^2;
```

(%o13) $f(x) := x^2$

```
(%i14) f(u(x));
```

(%o14) x

```
(%i15) "*****************************************************"$
(%i16) u(x):=sin(x)+cos(x);
```

(%o16) $u(x) := \sin(x) + \cos(x)$

```
(%i17) f(x):=sqrt(x);
```

(%o17) $f(x) := \sqrt{x}$

```
(%i18) f(u(x));
```

(%o18) $\sqrt{\sin(x) + \cos(x)}$

```
(%i19) "*****************************************************"$
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Wertetabelle einer mehrdimensionalen Funktion "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) f(x,y):=sin(x)*cos(y);
```

(%o4) $f(x, y) := \sin(x) \cos(y)$

```
(%i5) "**************************************************"$
(%i6) for i:1 thru 3 do for j:1 thru 3 do display(f(i,j));
```

$f(1, 1) = \cos(1) \sin(1)$ $f(1, 2) = \sin(1) \cos(2)$ $f(1, 3) = \sin(1) \cos(3)$ $f(2, 1) = \cos(1) \sin(2)$ $f(2, 2) = \cos(2) \sin(2)$ $f(2, 3) = \sin(2) \cos(3)$ $f(3, 1) = \cos(1) \sin(3)$ $f(3, 2) = \cos(2) \sin(3)$ $f(3, 3) = \cos(3) \sin(3)$

(%o6) DONE

hier wird eine FOR-Schleife verwendet. Man nennt eine solche Schleife auch "Zählschleife". Eine Schleife wird mehrmals durchlaufen.

(%i7)

Anmerkung: wenn man anstelle von "display" -> "print" verwendet, werden die Ergebnisse untereinander geschrieben

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Berechnung einer Wertetabelle "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) f(x):=x^2-8*x+15;
```

$$(\%o4)\quad f(x) := x^2 - 8\,x + 15$$

Wertetabellen sind für das Verständnis und die grafische Darstellung von Funktionen sehr wichtig.

```
(%i5) "****************************************************"$
(%i6) " Jetzt verwenden wir eine Schleifenanweisung: "$
(%i7) for i:-3 thru 6 do display(f(i));
```

$f(-3) = 48$ $f(-2) = 35$ $f(-1) = 24$ $f(0) = 15$ $f(1) = 8$ $f(2) = 3$ $f(3) = 0$ $f(4) = -1$ $f(5) = 0$ $f(6) = 3$

```
(%o7)  DONE
(%i8) " Alternative ist die Verwendung von MAKELIST "$
(%i9) makelist(f(x),x,-3,6);
(%o9)  [ 48 , 35 , 24 , 15 , 8 , 3 , 0 , - 1 , 0 , 3 ]
(%i10)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Wertetabellen mit MAKELIST "$
(%i4) "*****************************************************"$
(%i5) f(n):=1/n;
```

Funktionen mit den ersten n natürlichen Zahlen als Definitionsmenge werden Folgen genannt.

(%o5) $f(n) := \frac{1}{n}$

```
(%i6) makelist(f(n),n,1,10);
```

"makelist" ist sehr gut geeignet, um Folgen zu erzeugen

(%o6) $[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}]$

```
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) f(i):=i;
(%o8) f(i) := i
(%i9) makelist(f(i),i,1,10);
(%o9) [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) f(n):=(n+1)/(n+2);
```

(%o11) $f(n) := \frac{n+1}{n+2}$

```
(%i12) makelist(f(n),n,1,10);
```

(%o12) $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \frac{11}{12}]$

```
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14) f(n):=n!;
(%o14) f(n) := n !
(%i15) makelist(f(n),n,0,10);
(%o15) [1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800]
(%i16) "*****************************************************"$
(%i18) f(i):=binom(3,i);
```

statt "binom" könnte man auch "binomial" schreiben

(%o18) $f(i) := \binom{3}{i}$

```
(%i19) makelist(f(i),i,0,3);
(%o19) [1, 3, 3, 1]
(%i20) "*****************************************************"$
(%i21) K(x):=x^2+8*x+36;
```

(%o21) $K(x) := x^2 + 8\,x + 36$ eine quadratische Kostenfunktion

(%i22) `DK(x):=K(x)/x;`

(%o22) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$ Durchschnittskosten oder Stückkosten

(%i23) `makelist(DK(x),x,1,10);`

(%o23) $[\,45\,,\,28\,,\,23\,,\,21\,,\,\frac{101}{5}\,,\,20\,,\,\frac{141}{7}\,,\,\frac{41}{2}\,,\,21\,,\,\frac{108}{5}\,]$

(%i24) `"*****************************************************"$`

(%i25) Das ist die Tabelle der Durchschnittskosten für den Bereich x=1 bis x=10

(%i1) "=="$

(%i2) " Beispiele für Folgen   "$

(%i3) "=="$

Die Erzeugung von Listen ist beim Thema Folgen sehr vorteilhaft!

(%i4) `f1(n):=%i^n;`

(%o4) $f1(n) := \%i^{n}$

(%i5) `makelist(f1(n),n,1,5);`

(%o5) $[\, \%i , -1 , -\%i , 1 , \%i \,]$

(%i6) "=="$

(%i7) `f2(n):=1/n;`

(%o7) $f2(n) := \frac{1}{n}$

(%i8) `makelist(f2(n),n,1,5);`

(%o8) $[\, 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \frac{1}{5} \,]$

(%i9) "=="$

(%i10) `f3(n):=n/(n+1);`

(%o10) $f3(n) := \frac{n}{n+1}$

(%i11) `makelist(f3(n),n,1,5);`

(%o11) $[\, \frac{1}{2} , \frac{2}{3} , \frac{3}{4} , \frac{4}{5} , \frac{5}{6} \,]$

(%i12) "=="$

(%i13) `f4(n):=n/2^n;`

(%o13) $f4(n) := \frac{n}{2^{n}}$

(%i14) `makelist(f4(n),n,1,5);`

(%o14) $[\, \frac{1}{2} , \frac{1}{2} , \frac{3}{8} , \frac{1}{4} , \frac{5}{32} \,]$

(%i15) "=="$

(%i16)

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks         "$
(%i3) " sind 12 m und 16 m                                  "$
(%i4) " Berechnen Sie Fläche und Höhe                       "$
(%i5) "*****************************************************"$
(%i6) a:12;
(%o6)  12
(%i7) b:16;
(%o7)  16
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) A:a*b/2;
(%o9)  96
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) " Die Fläche ist 96 m²                                "$
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) c:sqrt(a^2+b^2);
(%o13)  20
(%i14) g:A=c*h/2;
(%o14)  96 = 10 h
(%i15) solve(g,h);
(%o15)  [ h = 48/5 ]
(%i16) "*****************************************************"$
(%i17) " Die Höhe ist 9,6 m                                  "$
(%i18) "*****************************************************"$
(%i19)
```

Gegeben sind die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks

Flächenberechnung

das ist der Pythagoräische Lehrsatz

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " 5 Allgemeine Dreiecke nach Dreiecksungleichung     "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) a:[4,3,6,9,8];
(%o4)  [ 4 , 3 , 6 , 9 , 8 ]
(%i5) b:[3,4,2,5,6];
(%o5)  [ 3 , 4 , 2 , 5 , 6 ]
(%i6) c:a+b-1;
(%o6)  [ 6 , 6 , 7 , 13 , 13 ]
```

a + b > c (Dreiecksungleichung)

```
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) " Dreiecksungleichung: a+b < c                        "$
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) u[1]:a[1]+b[1]+c[1];
(%o10)  13
```

indizierte Variable: direkter Zugriff auf einzelne Listenelemente

```
(%i11) makelist(u[i]:a[i]+b[i]+c[i],i,1,5);
(%o11)  [ 13 , 13 , 15 , 27 , 27 ]
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) " Liste des jeweiligen Umfangs                        "$
(%i16) "*****************************************************"$
(%i17) u[1];
(%o17)  13
(%i18) u[2];
(%o18)  13
(%i19) u[3];
(%o19)  15
(%i20) makelist(s[i]:u[i]/2,i,1,5);
```

(%o20) $\left[\frac{13}{2} , \frac{13}{2} , \frac{15}{2} , \frac{27}{2} , \frac{27}{2} \right]$

braucht man für die Heronsche Formel

```
(%i21) "*****************************************************"$
(%i22) " s ist der halbe Umfang                              "$
(%i23) "*****************************************************"$
(%i24)
```

Berechnung der Flächen nach der Heronschen Formel

```
makelist(A[i]:sqrt(s[i]*(s[i]-a[i])*(s[i]-b[i])*(s[i]-c[i])),i,1,5);
```

(%o24) $\left[\frac{\sqrt{455}}{4} , \frac{\sqrt{455}}{4} , \frac{3\sqrt{55}}{4} , \frac{9\sqrt{51}}{4} , \frac{9\sqrt{55}}{4} \right]$

```
(%i26) "*****************************************************"$
(%i27) " Das sollten die jeweiligen Flächen sein             "$
(%i28) "*****************************************************"$
(%i29)
```

(%i1) "**"$

(%i2) " 5 Allgemeine Dreiecke nach Dreiecksungleichung "$

(%i3) "**"$

(%i4) a:[4,3,6,9,8];

(%o4) [4 , 3 , 6 , 9 , 8]

(%i5) b:[3,4,2,5,6];

(%o5) [3 , 4 , 2 , 5 , 6]

(%i6) c:a+b-1;

(%o6) [6 , 6 , 7 , 13 , 13]

Frage: kann es ein Dreieck sein? Das ist dann der Fall, wenn die Summe von zwei Seiten größer als die dritte Seite ist

(%i7) "**"$

(%i8) " Dreiecksungleichung: a+b < c "$

(%i9) "**"$

(%i10) u[1]:a[1]+b[1]+c[1];

(%o10) 13

(%i11) makelist(u[i]:a[i]+b[i]+c[i],i,1,5);

(%o11) [13 , 13 , 15 , 27 , 27]

(%i12) "**"$

(%i13) " Liste des jeweiligen Umfangs "$

(%i16) "**"$

(%i17) u[1];

(%o17) 13

(%i18) u[2];

(%o18) 13

(%i19) u[3];

(%o19) 15

(%i20) makelist(s[i]:u[i]/2,i,1,5);

(%o20) $\left[\frac{13}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{27}{2}, \frac{27}{2} \right]$

(%i21) "**"$

(%i22) " s ist der halbe Umfang "$

(%i23) "**"$

(%i24)
makelist(A[i]:sqrt(s[i]*(s[i]-a[i])*(s[i]-b[i])*(s[i]-c[i])),i,1,5);

(%o24) $\left[\frac{\sqrt{455}}{4}, \frac{\sqrt{455}}{4}, \frac{3\sqrt{55}}{4}, \frac{9\sqrt{51}}{4}, \frac{9\sqrt{55}}{4} \right]$

(%i26) "**"$

(%i27) " Das sollten die jeweiligen Flächen sein "$

(%i28) "**"$

(%i29) u1:a+b+c;

(%o29) [13 , 13 , 15 , 27 , 27]

(%i30) s1:u1/2;

(%o30) $\left[\frac{13}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \frac{27}{2}, \frac{27}{2}\right]$

(%i32) A:sqrt(s1*(s1-a)*(s1-b)*(s1-c));

(%o32) $\left[\frac{\sqrt{455}}{4}, \frac{\sqrt{455}}{4}, \frac{3\sqrt{55}}{4}, \frac{9\sqrt{51}}{4}, \frac{9\sqrt{55}}{4}\right]$

(%i33) "***"$

(%i34) " Mit Listenverarbeitung kommt man sehr elegant   "$

(%i35) " zu den gleichen Resultaten   "$

(%i37) "***"$

(%i38)

Listenverarbeitung ist ein zentrales Thema in
1.) der Programmiersprache LISP
2.) im CAS Maxima

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks bekannt    "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) a:6;
(%o4)  6
(%i5) c:4;
(%o5)  4
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) hc:sqrt(a^2-(c/2)^2);
```

(%o7) $4\sqrt{2}$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) " Höhe auf c                                          "$
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) A:c*hc/2;
```

(%o11) $8\sqrt{2}$

```
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) ha:2*A/a;
```

(%o13) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

```
(%i14) "*****************************************************"$
(%i15) U:2*a+c;
(%o15)  16
(%i16) "*****************************************************"$
(%i17) "*****************************************************"$
(%i18) a:makelist(5*k+1,k,1,5);
(%o18)  [ 6 , 11 , 16 , 21 , 26 ]
(%i19) c:makelist(6*k-2,k,1,5);
(%o19)  [ 4 , 10 , 16 , 22 , 28 ]
(%i20) "*****************************************************"$
(%i21) hc:sqrt(a^2-(c/2)^2);
```

(%o21) $[\,4\sqrt{2}, 4\sqrt{6}, 8\sqrt{3}, 8\sqrt{5}, 4\sqrt{30}\,]$

```
(%i22) A:c*hc/2;
```

(%o22) $[\,8\sqrt{2}, 20\sqrt{6}, 64\sqrt{3}, 88\sqrt{5}, 56\sqrt{30}\,]$

```
(%i23) ha:2*A/a;
```

(%o23) $\left[\,\frac{8\sqrt{2}}{3}, \frac{40\sqrt{6}}{11}, 8\sqrt{3}, \frac{176\sqrt{5}}{21}, \frac{56\sqrt{30}}{13}\,\right]$

```
(%i24) U:2*a+c;
(%o24)  [ 16 , 32 , 48 , 64 , 80 ]
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Gleichschenkeliges Dreieck: Schenkel und Höhe      "$
(%i4) "**************************************************"$
(%i5) a:32.5;
(%o5)  32.5
(%i6) h:31.5;
(%o6)  31.5
(%i7) "**************************************************"$
(%i8) g:a^2=h^2+(c/2)^2;
```

(%o8) $1056.25 = \frac{c^2}{4} + 992.25$

```
(%i9) solve(g,c);
RAT replaced 64.0 by 64//1 = 64.0
(%o9)  [ c = - 16 , c = 16 ]
(%i10) c:16;
(%o10)  16
(%i11) "**************************************************"$
(%i12) A:c*h/2;
(%o12)  252.0
(%i13) "**************************************************"$
(%i14) U:2*a+c;
(%o14)  81.0
(%i15) "**************************************************"$
(%i16) ha:2*A/a;
(%o16)  15.507692307692308
(%i18)
```

```
(%i1) "***************************************************"$
(%i2) " Gleichschenkelige Dreiecke                        "$
(%i3) "***************************************************"$
(%i4) c:[5,4,6,8,14];
(%o4) [ 5 , 4 , 6 , 8 , 14 ]
(%i5) h:[3,4,5,6,4];
(%o5) [ 3 , 4 , 5 , 6 , 4 ]
```

fünf Beispiele werden auf einmal abgerechnet

```
(%i6) "***************************************************"$
(%i7) " Man kennt also die Grundlinie und die Höhe        "$
(%i8) "***************************************************"$
(%i9) a:sqrt(h^2+(c/2)^2);
```

(%o9) $\left[\frac{\sqrt{61}}{2} , 2\sqrt{5} , \sqrt{34} , 2\sqrt{13} , \sqrt{65} \right]$

```
(%i10) "***************************************************"$
(%i11) " Das sind die Schenkel                             "$
(%i12) "***************************************************"$
(%i13) U:2*a+c;
```

(%o13) $\left[\sqrt{61}+5 , 4\sqrt{5}+4 , 2\sqrt{34}+6 , 4\sqrt{13}+8 , 2\sqrt{65}+14 \right]$

```
(%i14) "***************************************************"$
(%i15) " Das ist der jeweilige Umfang                      "$
(%i16) "***************************************************"$
(%i20)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Gleichschenkelige Dreiecke                        "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) c:makelist(7*k-1,k,1,5);
```

(%o4) $[6, 13, 20, 27, 34]$

```
(%i5) hc:makelist(6*k-2,k,1,5);
```

(%o5) $[4, 10, 16, 22, 28]$

```
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) a:sqrt(hc^2+(c/2)^2);
```

(%o7) $\left[5, \frac{\sqrt{569}}{2}, 2\sqrt{89}, \frac{\sqrt{2665}}{2}, \sqrt{1073}\right]$

```
(%i8) "**************************************************"$
(%i9) A:c*hc/2;
```

(%o9) $[12, 65, 160, 297, 476]$

```
(%i10) "**************************************************"$
(%i11) U:2*a+c;
```

(%o11) $\left[16, \sqrt{569}+13, 4\sqrt{89}+20, \sqrt{2665}+27, 2\sqrt{1073}+34\right]$

```
(%i12) "**************************************************"$
(%i13) ha:2*A/a;
```

(%o13) $\left[\frac{24}{5}, \frac{260}{\sqrt{569}}, \frac{160}{\sqrt{89}}, \frac{1188}{\sqrt{2665}}, \frac{952}{\sqrt{1073}}\right]$

```
(%i14) "**************************************************"$
(%i15)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Gleichseitiges Dreieck - Heronsche Formel          "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) a:x;
(%o4)  x
(%i5) b:x;
(%o5)  x
(%i6) c:x;
(%o6)  x
(%i7) "**************************************************"$
(%i8) U:a+b+c;
(%o8)  3 x
(%i9) s:U/2;
```

(%o9) $\frac{3\,x}{2}$

```
(%i10) "**************************************************"$
(%i11) A:sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c));
```

(%o11) $\frac{\sqrt{3}\,x^2}{4}$

```
(%i12) "**************************************************"$
(%i15) " Flächenformel für das gleichseitige Dreieck       "$
(%i16) "**************************************************"$
(%i17)
```

gleichseitiges Dreieck

```
(%i1)  "*****************************************************"$
(%i2)  " In einem rechtwinkeligen Dreieck ist der Flächen-   "$
(%i3)  " inhalt 120 cm² und die Seitenlänge a 24 cm.         "$
(%i4)  " Wie groß sind c und b                               "$
(%i5)  "*****************************************************"$
(%i6)  A:120;
(%o6)   120
(%i8)  a:24;
(%o8)   24
(%i10)  "*****************************************************"$
(%i11)  g:A=a*b/2;
(%o11)   120 = 12 b
(%i12)  solve(g,b);
(%o12)   [ b = 10 ]
(%i13)  b:10;
(%o13)   10
(%i14)  "*****************************************************"$
(%i15)  c:sqrt(a^2+b^2);
(%o15)   26
(%i16)  "*****************************************************"$
(%i17)
```

```
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Lehrsatz Pythagoras - Listenverarbeitung          "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) a:[3,6,7,9,13];
(%o4)  [ 3 , 6 , 7 , 9 , 13 ]
(%i5) b:[4,8,12,10,14];
(%o5)  [ 4 , 8 , 12 , 10 , 14 ]
(%i6) "****************************************************"$
(%i7) " Listen der Katheten                                "$
(%i8) "****************************************************"$
(%i9) c:sqrt(a^2+b^2);
```

(%o9) $[\,5\,,\,10\,,\,\sqrt{193}\,,\,\sqrt{181}\,,\,\sqrt{365}\,]$

```
(%i10) "****************************************************"$
(%i11) " Das sind die Hypothenusen                          "$
(%i12) "****************************************************"$
(%i15) "Aus a*b/2=c*h/2 folgt h=a*b/c                      "$
(%i16) "****************************************************"$
(%i17) h:a*b/c;
```

(%o17) $\left[\,\frac{12}{5}\,,\,\frac{24}{5}\,,\,\frac{84}{\sqrt{193}}\,,\,\frac{90}{\sqrt{181}}\,,\,\frac{182}{\sqrt{365}}\,\right]$

```
(%i18) "****************************************************"$
(%i19) " Das ist die Liste der Höhen                        "$
(%i20) "****************************************************"$
(%i21)
```

```
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Rechtwinkelige Dreiecke - Listenverarbeitung       "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) a:[3,6,9,12,15];
(%o4)  [ 3 , 6 , 9 , 12 , 15 ]
(%i5) b:[4,8,12,16,20];
(%o5)  [ 4 , 8 , 12 , 16 , 20 ]
(%i6) "****************************************************"$
(%i7) " Liste der Katheten                                 "$
(%i8) "****************************************************"$
(%i9) c:sqrt(a^2+b^2);
(%o9)  [ 5 , 10 , 15 , 20 , 25 ]
(%i10) "****************************************************"$
(%i11) h:a*b/c;
```

(%o11) $\left[\frac{12}{5} , \frac{24}{5} , \frac{36}{5} , \frac{48}{5} , 12 \right]$

```
(%i12) "****************************************************"$
(%i13) p:a^2/c;
```

(%o13) $\left[\frac{9}{5} , \frac{18}{5} , \frac{27}{5} , \frac{36}{5} , 9 \right]$

```
(%i14) "****************************************************"$
(%i15) q:b^2/c;
```

(%o15) $\left[\frac{16}{5} , \frac{32}{5} , \frac{48}{5} , \frac{64}{5} , 16 \right]$

```
(%i16) "****************************************************"$
(%i17) c;
(%o17)  [ 5 , 10 , 15 , 20 , 25 ]
(%i18) c1:p+q;
(%o18)  [ 5 , 10 , 15 , 20 , 25 ]
(%i19) "****************************************************"$
(%i20) " Probe stimmt                                       "$
(%i21) "****************************************************"$
(%i22) A:a*b/2;
(%o22)  [ 6 , 24 , 54 , 96 , 150 ]
(%i23) A1:c*h/2;
(%o23)  [ 6 , 24 , 54 , 96 , 150 ]
(%i24) "****************************************************"$
(%i25) U:a+b+c;
(%o25)  [ 12 , 24 , 36 , 48 , 60 ]
```

```
(%i26) s:U/2;
(%o26)  [ 6 , 12 , 18 , 24 , 30 ]
(%i27) A3:sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c));
(%o27)  [ 6 , 24 , 54 , 96 , 150 ]
(%i28) "*****************************************************"$
(%i29) " Probe nach HERON stimmt                             "$
(%i30) "*****************************************************"$
(%i31)
```

```
(%i1)  "**************************************************"$
(%i2)  " Rechtwinkelige Dreiecke - Listenverarbeitung      "$
(%i3)  "**************************************************"$
(%i4)  a:[3,6,9,12,15];
(%o4)  [ 3 , 6 , 9 , 12 , 15 ]
(%i8)  h:[12/5,24/5,36/5,48/5,12];
```

(%o8) $[\frac{12}{5}, \frac{24}{5}, \frac{36}{5}, \frac{48}{5}, 12]$

```
(%i9)  "**************************************************"$
(%i10) p:sqrt(a^2-h^2);
```

(%o10) $[\frac{9}{5}, \frac{18}{5}, \frac{27}{5}, \frac{36}{5}, 9]$

```
(%i11) "**************************************************"$
(%i12) c:a^2/p;
(%o12) [ 5 , 10 , 15 , 20 , 25 ]
(%i13) "**************************************************"$
(%i14) q:c-p;
```

(%o14) $[\frac{16}{5}, \frac{32}{5}, \frac{48}{5}, \frac{64}{5}, 16]$

```
(%i15) "**************************************************"$
(%i16) b:sqrt(c*q);
(%o16) [ 4 , 8 , 12 , 16 , 20 ]
(%i17) b1:sqrt(c^2-a^2);
(%o17) [ 4 , 8 , 12 , 16 , 20 ]
(%i18) "**************************************************"$
(%i19) A:a*b/2;
(%o19) [ 6 , 24 , 54 , 96 , 150 ]
(%i20) A1:c*h/2;
(%o20) [ 6 , 24 , 54 , 96 , 150 ]
(%i21) "**************************************************"$
(%i22) "**************************************************"$
(%i23)
```

(%i1) "**"$

(%i2) " Listenverarbeitung rechtwinkeliges Dreieck "$

(%i3) "**"$

(%i4) b:makelist(99*i,i,1,5);

(%o4) [99 , 198 , 297 , 396 , 495]

(%i5) b;

(%o5) [99 , 198 , 297 , 396 , 495]

(%i6) A:makelist(990*i^2,i,1,5);

(%o6) [990 , 3960 , 8910 , 15840 , 24750]

(%i7) A;

(%o7) [990 , 3960 , 8910 , 15840 , 24750]

fünf Breiten und Flächen werden automatisch generiert

(%i8) "**"$

(%i9) a:2*A/b;

(%o9) [20 , 40 , 60 , 80 , 100]

(%i10) "**"$

(%i11) c:sqrt(a^2+b^2);

(%o11) [101 , 202 , 303 , 404 , 505]

(%i12) "**"$

(%i13) h:a*b/c;

(%o13) $\left[\frac{1980}{101} , \frac{3960}{101} , \frac{5940}{101} , \frac{7920}{101} , \frac{9900}{101} \right]$

(%i14) "**"$

(%i15) p:a^2/c;

(%o15) $\left[\frac{400}{101} , \frac{800}{101} , \frac{1200}{101} , \frac{1600}{101} , \frac{2000}{101} \right]$

(%i16) q:b^2/c;

(%o16) $\left[\frac{9801}{101} , \frac{19602}{101} , \frac{29403}{101} , \frac{39204}{101} , \frac{49005}{101} \right]$

(%i17) c1:p+q;

(%o17) [101 , 202 , 303 , 404 , 505]

(%i18) "**"$

(%i19) " Merke: wenn sich eine Kathete verdoppelt, "$

(%i20) " vervierfacht sich die Fläche "$

(%i21) "**"$

(%i22)

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Rechtwinkeliges Dreieck - Listenverarbeitung      "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) a:makelist(18*i,i,1,5);
(%o4)  [ 18 , 36 , 54 , 72 , 90 ]
(%i5) A:makelist(720*i^2,i,1,5);
(%o5)  [ 720 , 2880 , 6480 , 11520 , 18000 ]
```

automatische Generierung
von Kathete und Fläche

```
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) b:2*A/a;
(%o7)  [ 80 , 160 , 240 , 320 , 400 ]
(%i8) "**************************************************"$
(%i9) c:sqrt(a^2+b^2);
(%o9)  [ 82 , 164 , 246 , 328 , 410 ]
(%i10) "**************************************************"$
(%i11) h:a*b/c;
```

(%o11) $\left[\frac{720}{41} , \frac{1440}{41} , \frac{2160}{41} , \frac{2880}{41} , \frac{3600}{41} \right]$

```
(%i12) "**************************************************"$
(%i13) p:a^2/c;
```

(%o13) $\left[\frac{162}{41} , \frac{324}{41} , \frac{486}{41} , \frac{648}{41} , \frac{810}{41} \right]$

```
(%i14) q:b^2/c;
```

(%o14) $\left[\frac{3200}{41} , \frac{6400}{41} , \frac{9600}{41} , \frac{12800}{41} , \frac{16000}{41} \right]$

```
(%i15) c1:p+q;
(%o15)  [ 82 , 164 , 246 , 328 , 410 ]
(%i16)
```

(%i1) "**"$

(%i2) " Gegeben sind Hypothenuse c und Kathete a "$

(%i3) " Berechne den Umfang mittels Listenverarbeitung "$

(%i4) "**"$

(%i5) c:[10,13,17,33, 25];

(%o5) $[10, 13, 17, 33, 25]$

(%i6) a:c-2;

(%o6) $[8, 11, 15, 31, 23]$

5 Dreiecke

c sind die Hypothenusen

a sind Katheten

(%i7) "**"$

(%i8) b:sqrt(c^2-a^2);

(%o8) $[6, 4\sqrt{3}, 8, 8\sqrt{2}, 4\sqrt{6}]$

Lehrsatz des Pythagoras

(%i9) "**"$

(%i10) u:a+b+c;

(%o10) $[24, 4\sqrt{3}+24, 40, 8\sqrt{2}+64, 4\sqrt{6}+48]$

Umfang

(%i11) "**"$

(%i12) " Wie lauten die Flächen? "$

(%i13) "**"$

(%i14) A:a*b/2;

(%o14) $[24, 22\sqrt{3}, 60, 124\sqrt{2}, 46\sqrt{6}]$

(%i15) "**"$

(%i16) " Heronsche Formel "$

(%i17) "**"$

Flächenberechnung nach der Heronschen Formel

(%i18) s:u/2;

(%o18) $\left[12, \frac{4\sqrt{3}+24}{2}, 20, \frac{8\sqrt{2}+64}{2}, \frac{4\sqrt{6}+48}{2}\right]$

(%i19) F:sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c));

(%o19) $\left[24, \frac{\sqrt{4\sqrt{3}+24}\sqrt{\frac{4\sqrt{3}+24}{2}-13}\sqrt{\frac{4\sqrt{3}+24}{2}-11}\sqrt{\frac{4\sqrt{3}+24}{2}-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}, 60,\right.$

$\frac{\sqrt{8\sqrt{2}+64}\sqrt{\frac{8\sqrt{2}+64}{2}-33}\sqrt{\frac{8\sqrt{2}+64}{2}-31}\sqrt{\frac{8\sqrt{2}+64}{2}-8\sqrt{2}}}{\sqrt{2}},$

$\left.\frac{\sqrt{4\sqrt{6}+48}\sqrt{\frac{4\sqrt{6}+48}{2}-25}\sqrt{\frac{4\sqrt{6}+48}{2}-23}\sqrt{\frac{4\sqrt{6}+48}{2}-4\sqrt{6}}}{\sqrt{2}}\right]$

(%i22) unterschied:A-F,numer;

(%o22) $[0, 1.4210854715202\ 10^{-14}, 0, -1.13686837721616\ 10^{-13}, -4.263256414560601\ 10^{-14}]$

(%i23) "**"$

```
(%i24)  " Alle Unterschiede sind NULL                        "$
(%i25)  "****************************************************"$
(%i26)
```

Man kann die Flächen auf mehrere Arten berechnen

```
(%i1)  "================================================"$
(%i4)  " Winkel im Bogenmaß                             "$
(%i5)  "================================================"$
(%i6)  grad:[1,30,45,60,90,180,360,720,-75];
(%o6)  [ 1 , 30 , 45 , 60 , 90 , 180 , 360 , 720 , - 75 ]
(%i7)  "================================================"$
(%i8)  " 360° ist 2*%pi RAD                             "$
(%i9)  "================================================"$
(%i10)  rad:grad*%pi/180;
```

(%o10) $\left[\frac{\%pi}{180} , \frac{\%pi}{6} , \frac{\%pi}{4} , \frac{\%pi}{3} , \frac{\%pi}{2} , \%pi , 2\ \%pi , 4\ \%pi , - \frac{5\ \%pi}{12} \right]$

```
(%i11)  fpprec : 8;
(%o11)  8
(%i12)  %o10,numer;
(%o12)  [ 0.0174533 , 0.523599 , 0.785398 , 1.0471976 , 1.5707963 ,
3.1415927 , 6.2831853 , 12.566371 , - 1.3089969 ]
(%i13)  fpprec : 5;
(%o13)  5
(%i15)  %o10,numer;
(%o15)  [ 0.0175 , 0.524 , 0.785 , 1.0472 , 1.5708 , 3.1416 , 6.2832 , 12.566
, - 1.309 ]
(%i16)
```

```
(%i1)  "**************************************************"$
(%i2)  " Winkel im recthwinkeligen Dreieck               "$
(%i3)  "**************************************************"$
(%i4)  " Beispiel 1:                                      "$
(%i5)  " der Winkel Alpha ist doppelt so groß             "$
(%i6)  " wie der Winkel Beta                               "$
(%i8)  " Beispiel 2:"$
(%i13)  " der Winkel Alpha ist dreimal so groß            "$
(%i14)  " wie der Winkel Beta                             "$
(%i15)  "*************************************************"$
(%i16)  g1:gamma=90;
(%o16)   gamma = 90
(%i18)  g2:alpha+beta+gamma=180;        Winkelsumme im Dreieck
(%o18)   gamma + BETA + ALPHA = 180
(%i20)  g3:alpha=2*beta;
(%o20)   ALPHA = 2 BETA
(%i21)  "*************************************************"$
                                               Gleichungssystem
(%i22)  solve([g1,g2,g3],[alpha,beta,gamma]);    auflösen
(%o22)   [ [ ALPHA = 60 , BETA = 30 , gamma = 90 ] ]
(%i23)  "*************************************************"$
(%i24)  " Ergebnis von Beispiel 1                         "$
(%i25)  "*************************************************"$
(%i26)  g3:alpha=3*beta;
(%o26)   ALPHA = 3 BETA
(%i27)  solve([g1,g2,g3],[alpha,beta,gamma]);
```

(%o27) $[[ALPHA = \frac{135}{2} , BETA = \frac{45}{2} , gamma = 90]]$

```
(%i28)  "*************************************************"$
(%i29)  " Ergebnis von Beispiel 2                         "$
(%i30)  "*************************************************"$
(%i31)
```

3 Gleichungen

```
(%i1)  "**************************************************"$
(%i2)  " Rechtwinkeliges Dreieck, Listenverarbeitung       "$
(%i3)  "**************************************************"$
(%i4)  a:makelist(5*i,i,1,5);
(%o4)   [ 5 , 10 , 15 , 20 , 25 ]
(%i5)  c:makelist(13*i,i,1,5);
(%o5)   [ 13 , 26 , 39 , 52 , 65 ]
(%i6)  "**************************************************"$
(%i7)  b:sqrt(c^2-a^2);
(%o7)   [ 12 , 24 , 36 , 48 , 60 ]
(%i8)  "**************************************************"$
(%i9)  h:a*b/c;
```

(%o9) $\left[\frac{60}{13} , \frac{120}{13} , \frac{180}{13} , \frac{240}{13} , \frac{300}{13} \right]$

```
(%i10)  "**************************************************"$
(%i11)  p:a^2/c;
```

(%o11) $\left[\frac{25}{13} , \frac{50}{13} , \frac{75}{13} , \frac{100}{13} , \frac{125}{13} \right]$

```
(%i12)  q:b^2/c;
```

(%o12) $\left[\frac{144}{13} , \frac{288}{13} , \frac{432}{13} , \frac{576}{13} , \frac{720}{13} \right]$

```
(%i13)  c1:p+q;
(%o13)   [ 13 , 26 , 39 , 52 , 65 ]
(%i14)  "**************************************************"$
(%i15)  " Summenprobe passt                                "$
(%i16)  "**************************************************"$
(%i17)  A:a*b/2;
(%o17)   [ 30 , 120 , 270 , 480 , 750 ]
(%i18)  A1:c*h/2;
(%o18)   [ 30 , 120 , 270 , 480 , 750 ]
(%i19)  "**************************************************"$
(%i20)  "**************************************************"$
(%i21)
```

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Höhen und Flächen von gleichseitigen Dreiecken     "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) a:[10,20,30,40,50];
(%o4) [ 10 , 20 , 30 , 40 , 50 ]
(%i5) "*****************************************************"$
(%i6) h:a/2*sqrt(3);
```

(%o6) $[\, 5\sqrt{3} \,,\, 10\sqrt{3} \,,\, 15\sqrt{3} \,,\, 20\sqrt{3} \,,\, 25\sqrt{3} \,]$

```
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) " Das sind die Höhen                                  "$
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) A:a^2/4*sqrt(3);
```

(%o10) $[\, 25\sqrt{3} \,,\, 100\sqrt{3} \,,\, 225\sqrt{3} \,,\, 400\sqrt{3} \,,\, 625\sqrt{3} \,]$

```
(%i11) "*****************************************************"$
(%i12) " Das sind die Flächen                                "$
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14)
```

(%i1) "**"$

(%i2) " Eine konvergente Reihe   "$

(%i3) "**"$

(%i4) f(x):=1/2^x;

(%o4) $f(x) := \frac{1}{2^x}$

(%i7) "**"$

Partialsummenfolge

(%i8) ps(n):=sum(f(x),x,1,n);

(%o8) $PS(n) := SUM(f(x), x, 1, n)$

(%i9) "**"$

Summe für 10 Glieder

(%i10) ps(10);

(%o10) $\frac{1023}{1024}$

(%i11) %,numer;

(%o11) 0.9990234375

(%i12) "**"$

Summe für 100 Glieder

(%i13) ps(100),numer;

(%o13) 1.0

(%i14) "**"$

Summe für 1000 Glieder

(%i16) ps(1000),numer;

(%o16) 1.0

(%i17) "**"$

(%i18) limit(ps(n),n,INF);

(%o18) $\lim_{n \to \mathrm{inf}} \sum_{x=1}^{n} f(x)$

(%i19) sum(1/2^x,x,1,INF);

man kann nicht über ps(n) summieren

Achtung, auf die technischen Probleme

(%o19) $\sum_{x=1}^{\mathrm{inf}} \frac{1}{2^x}$

(%i20) %,simpsum;

(%o20) 1

(%i21) "**"$

(%i22) " Achtung: hier gibt es Schwierigkeiten bei der   "$

(%i23) " Berechnung   "$

(%i24) "**"$

(%i25)

Summen: konvergierende alternierende Reihen

```
(%i1) f(x):=(-1)^x*1/2^x;
```

(%o1) $f(x) := \frac{(-1)^x\ 1}{2^x}$

```
(%i2) makelist(f(x),x,1,10);
```

(%o2) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}, -\frac{1}{128}, \frac{1}{256}, -\frac{1}{512}, \frac{1}{1024}\right]$

```
(%i3) sum(f(x),x,1,10);
```

(%o3) $-\frac{341}{1024}$

```
(%i4) "*****************************************************"$
(%i5) sum(f(x),x,1,50);
```

(%o5) $-\frac{375299968947541}{1125899906842624}$

```
(%i6) %,numer;
(%o6) - 0.33333333333333304
(%i7) "*****************************************************"$
(%i9) sum(f(x),x,1,1000),numer;
(%o9) - 0.33333333333333337
(%i10) sum(f(x),x,1,10000),numer;
(%o10) - 0.33333333333333337
(%i11) "*****************************************************"$
(%i12) " Die Reihe ist konvergent                           "$
(%i13) "*****************************************************"$
```

(%i14) **Der Grenzwert der konvergenten Reihe ist -1/3**

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Partialsummen einer divergenten Reihe             "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) f(x):=1/x;
```

(%o4) $f\left(x\right):=\frac{1}{x}$

```
(%i5) "**************************************************"$
(%i6) sum(f(x),x,1,10);
```

(%o6) $\frac{7381}{2520}$

```
(%i7) %,numer;
(%o7) 2.928968253968254
(%i8) "**************************************************"$
(%i9) sum(f(x),x,1,100),numer;
(%o9) 5.187377517639621
(%i10) "**************************************************"$
(%i15) sum(f(x),x,1,200),numer;
(%o15) 5.878030948121446
(%i16) "**************************************************"$
(%i18) sum(f(x),x,1,300),numer;
(%o18) 6.282663880299502
(%i19) "**************************************************"$
(%i20) sum(f(x),x,1,1000),numer;
(%o20) 7.485470860550343
(%i21) "**************************************************"$
(%i23) sum(f(x),x,1,10000),numer;
(%o23) 9.787606036044345
(%i24) "**************************************************"$
(%i27) wahrscheinlich ist die Reihe divergent
```

```
(%i1)  "*****************************************************"$
(%i2)  " Fläche und Umfang des Kreises - Listenverarbeitung "$
(%i3)  "*****************************************************"$
(%i4)  r:[10,20,30,40,50];
(%o4)   [ 10 , 20 , 30 , 40 , 50 ]
(%i5)  "*****************************************************"$
(%i6)  U:2*r*%pi;    man beachte die Schreibweise der Kreiszahl
(%o6)   [ 20 %pi , 40 %pi , 60 %pi , 80 %pi , 100 %pi ]
(%i7)  "*****************************************************"$
(%i8)  " Umfang der Kreise                                  "$
(%i9)  "*****************************************************"$
(%i10)  A:r^2*%pi;
(%o10)   [ 100 %pi , 400 %pi , 900 %pi , 1600 %pi , 2500 %pi ]
(%i11)  "*****************************************************"$
(%i12)  " Fläche der Kreise                                  "$
(%i13)  "*****************************************************"$
(%i14)  Flaechensumme:sum(A[k],k,1,5);
(%o14)   5500 %pi
(%i15)  Umfangsumme:sum(U[k],k,1,5);
(%o15)   300 %pi
(%i16)  "*****************************************************"$
(%i17)  " Summen von Fläche und Umfang                       "$
(%i18)  "*****************************************************"$
(%i19)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Pythagoräischer Lehrsatz und Kathetensätze        "$
(%i4) "**************************************************"$
(%i5) ks1:a^2=p*c;
```

(%o5) $a^2 = c\,p$

```
(%i6) ks2:b^2=q*c;
```

(%o6) $b^2 = c\,q$

```
(%i7) pls:ks1+ks2;
```

(%o7) $b^2 + a^2 = c\,q + c\,p$

```
(%i8) "**************************************************"$
(%i9) " p+q=c                                             "$
(%i10) "**************************************************"$
(%i11) pls:pls/c;
```

(%o11) $\frac{b^2 + a^2}{c} = \frac{c\,q + c\,p}{c}$

```
(%i12) pls:expand(pls);
```

(%o12) $\frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c} = q + p$

```
(%i13) "**************************************************"$
(%i14) " Wenn man p+q=c setzt, ist der P. Lehrsatz bewiesen "$
(%i15) "**************************************************"$
(%i16)
```

```
(%i1) "***************************************************"$
(%i2) " Flächen und Diagonalen von Quadraten              "$
(%i3) "***************************************************"$
(%i4) a:[10,20,30,40,50];
(%o4) [ 10 , 20 , 30 , 40 , 50 ]
(%i5) "***************************************************"$
(%i6) d:a*sqrt(2);
```

(%o6) $[10\sqrt{2}, 20\sqrt{2}, 30\sqrt{2}, 40\sqrt{2}, 50\sqrt{2}]$

```
(%i7) "***************************************************"$
(%i8) " Das sind die Diagonalen                           "$
(%i9) "***************************************************"$
(%i10) A:a^2;
(%o10) [ 100 , 400 , 900 , 1600 , 2500 ]
(%i11) "***************************************************"$
(%i12) " Das sind die Flächen                              "$
(%i13) "***************************************************"$
(%i14) Flaechensumme:sum(A[k],k,1,5);
(%o14) 5500
(%i15) "***************************************************"$
(%i16) " Das ist die Flächensumme                          "$
(%i17) "***************************************************"$
(%i18)
```

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Flächen und Diagonalen von Rechtecken              "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) a:[10,20,30,40,50];
(%o4)  [ 10 , 20 , 30 , 40 , 50 ]
(%i5) b:a-3;
(%o5)  [ 7 , 17 , 27 , 37 , 47 ]
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) " Die Breiten sind um 3 cm kürzer                    "$
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) A:a*b;
(%o9)  [ 70 , 340 , 810 , 1480 , 2350 ]
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) d:sqrt(a^2+b^2);
```

(%o11) $[\sqrt{149}, \sqrt{689}, 3\sqrt{181}, \sqrt{2969}, \sqrt{4709}]$

```
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) Flaechensumme:sum(A[i],i,1,5);
(%o13)  5050
(%i14)
```

das ist ein Vorteil von indizierten Variablen

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Größter gemeinsamer Teiler                          "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) p1:expand((x-1)*(x+2)*(x-3)*(x+4));
```

(%o4) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

```
(%i5) p2:p1*(x-5);
```

(%o5) $(x-5)(x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24)$

```
(%i6) p2:expand(p1*(x-5));
```

(%o6) $x^5 - 3x^4 - 23x^3 + 51x^2 + 94x - 120$

```
(%i7) gcd(p1,p2);                      "greatest common divisor" ???
```

(%o7) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i12) p2:(x+3);
(%o12) x + 3
(%i13) gcd(p1,p2);
(%o13) 1
(%i14) "*****************************************************"$
(%i15) p2:(x-3);
(%o15) x - 3
(%i16) gcd(p1,p2);
(%o16) x - 3
(%i17) "*****************************************************"$
(%i18) p2:x^2-8*x+15;
```

(%o18) $x^2 - 8x + 15$

```
(%i19) gcd(p1,p2);
(%o19) x - 3
(%i20) "*****************************************************"$
(%i21) p2:expand(p2^2);
```

(%o21) $x^4 - 16x^3 + 94x^2 - 240x + 225$

```
(%i22) gcd(p1,p2);
(%o22) x - 3
(%i23) "*****************************************************"$
```

```
(%i24) divide(p1,p2,x);
```

(%o24) $[\,1\,,\,18\,x^3-107\,x^2+226\,x-201\,]$

```
(%i25) divide(p2,p1,x);
```

(%o25) $[\,1\,,\,-18\,x^3+107\,x^2-226\,x+201\,]$

```
(%i26) "****************************************************"$
(%i27) p1:expand((x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4));
```

(%o27) $x^4-10\,x^3+35\,x^2-50\,x+24$

```
(%i28) p2:expand((x+1)*(x-2)*(x+3)*(x-4));
```

(%o28) $x^4-2\,x^3-13\,x^2+14\,x+24$

```
(%i29) p3:expand((x+1)*(x+2)*(x+3)*(x+4));
```

(%o29) $x^4+10\,x^3+35\,x^2+50\,x+24$

```
(%i30) gcd(p1,p2);
```

(%o30) $x^2-6\,x+8$

```
(%i31) gcd(p1,p3);
```

(%o31) 1

```
(%i32) gcd(p2,p3);
```

(%o32) $x^2+4\,x+3$

```
(%i33) "****************************************************"$
(%i34)
```

```
(%i1)  "==================================================="$
(%i2)  " Größter gemeinsamer Teiler                         "$
(%i3)  "==================================================="$
(%i4)  gcd(240,3750);
(%o4)  30
(%i5)  gcd(408,748);
(%o5)  68
(%i7)  ggt(a,b,c):=gcd(a,gcd(b,c));
(%o7)  ggt(a,b,c):=gcd(a,gcd(b,c))
(%i8)  ggt(30,66,114);
(%o8)  6
(%i9)  "==================================================="$
(%i10) gcd(x-1,x^2-2*x+1);
(%o10) x-1
(%i11) ggt(x-1,x^2-2*x+1,x^2-1);
(%o11) x-1
(%i12) "==================================================="$
(%i13) gcd(54,65);
(%o13) 1
(%i14) "==================================================="$
(%i15) " Solche Zahlen sind teilerfremd                     "$
(%i16) "==================================================="$
(%i17)
```

Achtung: diese benutzerdefinierte Funktion ist notwendig. (Zusammenhang mit der Rekursion)

```
(%i1) "=================================================="$
(%i2) " kleinstes gemeinsames Vielfaches                  "$
(%i3) "=================================================="$
(%i4) kgv(a,b):=(a*b)/gcd(a,b);
```

(%o4) $kgv\left(a\ ,\ b\right) := \dfrac{a\ b}{gcd\left(a\ ,\ b\right)}$

das kleinste gemeinsame Vielfache als benutzerdefinierte Funktion

```
(%i5) kgv(75,189);
```

(%o5) 4725

```
(%i6) kgv3(a,b,c):=kgv(a,kgv(b,c));
```

(%o6) $kgv3\left(a\ ,\ b\ ,\ c\right) := kgv\left(a\ ,\ kgv\left(b\ ,\ c\right)\right)$

```
(%i7) kgv3(24,160,180);
```

(%o7) 1440

```
(%i8) "=================================================="$
(%i9) kgv(x-1,x+1);
```

(%o9) $\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)$

```
(%i10) kgv(x-1,x^2-2*x+1);
```

(%o10) $x^2 - 2\ x + 1$

```
(%i11) kgv3(x-1,x+1,x^2-1);
```

(%o11) $x^2 - 1$

```
(%i12) "=================================================="$
(%i13)
```

(%i1) `x1:(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a);`

(%o1) $$\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a}$$

erste Lösung der quadratischen Gleichung

(%i2) `x2:(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a);`

(%o2) $$\frac{-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a}$$

zweite Lösung der quadratische Gleichung

(%i3) `g(x):=a*x^2+b*x+c;`

(%o3) $$g(x) := a\,x^2 + b\,x + c$$

quadratische Funktion

(%i4) `g(x1);`

Einsetzen erste Lösung

(%o4) $$\frac{\left(\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b\right)^2}{4\,a}+\frac{b\left(\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b\right)}{2\,a}+c$$

(%i5) `expand(%);`

(%o5) 0

(%i6) `g(x2);`

Einsetzen zweite Lösung

(%o6) $$\frac{\left(-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b\right)^2}{4\,a}+\frac{b\left(-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b\right)}{2\,a}+c$$

(%i7) `expand(%);`

(%o7) 0

(%i8) `"*****************************************************"$`

(%i9) `" Beweis der Mitternachtsformel                      "$`

(%i10) `"*****************************************************"$`

(%i11)

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Einige Bruchgleichungen                          "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) g1:(x-3)/(x+3)+(x+3)/(x-3)=26/(x^2-9);
```

(%o4) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{26}{x^2-9}$

```
(%i5) g2:(x+5)/(x-5)+(x-5)/(x+5)+13/6=0;
```

(%o5) $\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-5}{x+5}+\frac{13}{6}=0$

```
(%i6) g3:1/(x^2-9)+(2*x+3)/(x+3)=(3*x+4)/(x-3);
```

(%o6) $\frac{1}{x^2-9}+\frac{2\,x+3}{x+3}=\frac{3\,x+4}{x-3}$

```
(%i7) g4:(5*x+3)/(5*x-3)+(5*x-3)/(5*x+3)=468/(25*x^2-9);
```

(%o7) $\frac{5\,x+3}{5\,x-3}+\frac{5\,x-3}{5\,x+3}=\frac{468}{25\,x^2-9}$

```
(%i8) "**************************************************"$
(%i9) solve(g1,x);
```

(%o9) $[x=-2, x=2]$

```
(%i10) "**************************************************"$
(%i11) solve(g2,x);
```

(%o11) $[x=-1, x=1]$

```
(%i12) "**************************************************"$
(%i13) solve(g3,x);
```

(%o13) $[x=-2\sqrt{11}-8, x=2\sqrt{11}-8]$

```
(%i14) "**************************************************"$
(%i15) solve(g4,x);
```

(%o15) $[x=-3, x=3]$

```
(%i16) "**************************************************"$
(%i17)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Beispiele für Bruchgleichungen "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) g1:3/x-1=0;
```

(%o4) $\frac{3}{x} - 1 = 0$

```
(%i6) g2:4/(x-1)-1=0;
```

(%o6) $\frac{4}{x - 1} - 1 = 0$

```
(%i7) g3:a/(x-1)=a;
```

(%o7) $\frac{a}{x - 1} = a$

```
(%i8) g4:a/x-1=0;
```

(%o8) $\frac{a}{x} - 1 = 0$

```
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) " diese Gleichungen sind gegeben "$
(%i11) "*****************************************************"$
(%i12) solve(g1,x);
(%o12) [ x = 3 ]
(%i13) solve(g2,x);
(%o13) [ x = 5 ]
(%i14) solve(g3,x);
(%o14) [ x = 2 ]
(%i15) solve(g4,x);
(%o15) [ x = a ]
(%i16) "*****************************************************"$
(%i17) " das sind die Lösungen "$
(%i18) "*****************************************************"$
(%i19)
```

Einfache Bruchgleichungen können mit "solve" gut gelöst werden

(%i1) "**"$

(%i2) " Gleichungssysteme, die man üblicherweise durch "$

(%i3) " Substitution löst "$

(%i4) "**"$

(%i5) g1:3/(x+1)-2/(y+1)=5/7;

(%o5) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{y+1} = \frac{5}{7}$

(%i6) g2:5/(x+1)-7/(y+1)=2/3;

(%o6) $\frac{5}{x+1} - \frac{7}{y+1} = \frac{2}{3}$

Warum behandelt man solche Gleichungen überhaupt???

Eventueller Hintergrund: Mustererkennung

(%i7) "**"$

(%i8) solve([g1,g2],[x,y]);

(%o8) $[[x = -1, y = -1], [x = 2, y = 6]]$

(%i9) "**"$

(%i10) g1:7/(3*x+2)+3/(2*y+1)=12/5;

(%o10) $\frac{3}{2y+1} + \frac{7}{3x+2} = \frac{12}{5}$

(%i11) g2:5/(3*x+2)+9/(2*y+1)=4;

(%o11) $\frac{9}{2y+1} + \frac{5}{3x+2} = 4$

(%i12) "**"$

(%i13) solve([g1,g2],[x,y]);

(%o13) $[[x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{2}], [x = 1, y = 1]]$

(%i14) "**"$

(%i15) g1:10/(4*x+2*y+5)+20/(6*x+3*y+5)=7/12;

(%o15) $\frac{20}{3y+6x+5} + \frac{10}{2y+4x+5} = \frac{7}{12}$

(%i16) g2:20/(4*x+2*y+5)+30/(6*x+3*y+5)=1;

(%o16) $\frac{30}{3y+6x+5} + \frac{20}{2y+4x+5} = 1$

(%i17) "**"$

(%i18) solve([g1,g2],[x,y]);

(%o18) [ ]

(%i19) "**"$

(%i20) g1:10*u+20*v=7/12;

(%o20) $20v + 10u = \frac{7}{12}$

(%i21) g2:20*u+30*v=1;

(%o21) $30v + 20u = 1$

Linearisierung

(%i22) "**"$

(%i23) solve([g1,g2],[u,v]);

(%o23) $[[u = \frac{1}{40}, v = \frac{1}{60}]]$

(%i24) g1:4*x+2*y+5=40;

(%o24) $2 y + 4 x + 5 = 40$

(%i25) g2:6*x+3*y+5=60;

(%o25) $3 y + 6 x + 5 = 60$

(%i26) solve([g1,g2],[x,y]);

```
Inconsistent equations:  (2)
 -- an error.  Quitting.  To debug this try DEBUGMODE(TRUE);
```

(%i27) A:coefmatrix([g1,g2],[x,y]);

(%o27) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

(%i28) invert(A);

```
Division by 0
 -- an error.  Quitting.  To debug this try DEBUGMODE(TRUE);
```

(%i29) determinant(A);

(%o29) 0

(%i30) "***"$

(%i31) " Das System ist nicht lösbar   "$

(%i32) "***"$

(%i33) g1:17/(9*x+2*y+5)+1/(3*x-2*y+8)=21/20;

(%o33) $\frac{17}{2 y + 9 x + 5} + \frac{1}{- 2 y + 3 x + 8} = \frac{21}{20}$

(%i34) g2:13/(9*x+2*y+5)+5/(3*x-2*y+8)=33/20;

(%o34) $\frac{13}{2 y + 9 x + 5} + \frac{5}{- 2 y + 3 x + 8} = \frac{33}{20}$

(%i35) "***"$

(%i36) solve([g1,g2],[x,y]);

(%o36) $[[x = - \frac{13}{12}, y = \frac{19}{8}], [x = 1, y = 3]]$

(%i37) "***"$

(%i38)

(%i1) "=="$

(%i2) " Für welchen Wert von μ ist das Gleichungssystem   "$

(%i3) " eindeutig lösbar   "$

(%i4) "=="$

(%i5) A:matrix([-1,μ,-1], [0,2,-1], [2,1-μ,3]);

(%o5) $\begin{bmatrix} -1 & \mu & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\mu & 3 \end{bmatrix}$

(%i6) b:matrix([0], [1], [2]);

(%o6) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Ein Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante nicht NULL ist

(%i7) det:determinant(A);

(%o7) $-\mu-3$

(%i8) solve(%=0,μ);

(%o8) $[\mu = -3]$

(%i9) "=="$

(%i10) " μ muss von -3 verschieden sein   "$

(%i11) "=="$

(%i12) x:invert(A).b;

(%o12) $\begin{bmatrix} \dfrac{2(2-\mu)}{-\mu-3} + \dfrac{-2\mu-1}{-\mu-3} \\ -\dfrac{3}{-\mu-3} \\ \dfrac{\mu+1}{-\mu-3} - \dfrac{4}{-\mu-3} \end{bmatrix}$

(%i13) "=="$

(%i14) " sonst passiert eine unerlaubte Division durch 0   "$

(%i15) "=="$

(%i16)

```
(%i1) "***************************************************"$
(%i2) " Gleichungssysteme lösen                           "$
(%i3) "***************************************************"$
(%i4) g1:x+y=5;
(%o4)  y + x = 5
(%i5) g2:x-y=-1;
(%o5)  x - y = - 1
(%i6) "***************************************************"$
(%i7) solve([g1,g2],[x,y]);
(%o7)  [ [ x = 2 , y = 3 ] ]
(%i8) "***************************************************"$
(%i9) A:coefmatrix([g1,g2],[x,y]);
       [ 1   1 ]
(%o9)  [       ]
       [ 1  - 1 ]
(%i10) b:matrix([5], [-1]);
        [  5  ]
(%o10)  [     ]
        [ - 1 ]
(%i11) invert(A).b;
        [ 2 ]
(%o11)  [   ]
        [ 3 ]
(%i12) "***************************************************"$
(%i13) " Matrizenmethode                                   "$
(%i14) "***************************************************"$
(%i15) g1;
(%o15)  y + x = 5
(%i16) g2;
(%o16)  x - y = - 1
(%i17) g:g1+g2;
(%o17)  2 x = 4
(%i18) g:g/2;
(%o18)  x = 2
(%i19) g1,x=2;
(%o19)  y + 2 = 5
(%i20) g:%-2;
(%o20)  y = 3
(%i21) "***************************************************"$
(%i22) " Eliminationsverfahren                             "$
```

```
(%i23) "*****************************************************"$
(%i24) g1;
(%o24)  y + x = 5
(%i25) g2;
(%o25)  x - y = - 1
(%i26) g3:g1-y;
(%o26)  x = 5 - y
(%i27) g4:g2+y;
(%o27)  x = y - 1
(%i29) g:5-y=y-1;
(%o29)  5 - y = y - 1
(%i30) g:g+y;
(%o30)  5 = 2 y - 1
(%i31) g:g+1;
(%o31)  6 = 2 y
(%i32) g:g/2;
(%o32)  3 = y
(%i33) g1,y=3;
(%o33)  x + 3 = 5
(%i34) g:%-3;
(%o34)  x = 2
(%i35) "*****************************************************"$
(%i36) " Gleichsetzungsverfahren                             "$
(%i37) "*****************************************************"$
(%i38) g1;
(%o38)  y + x = 5
(%i39) g2;
(%o39)  x - y = - 1
(%i40) g:g1-x;
(%o40)  y = 5 - x
(%i41) g2,y=5-x;
(%o41)  2 x - 5 = - 1
(%i42) g:%+5;
(%o42)  2 x = 4
(%i43) g:g/2;
(%o43)  x = 2
(%i44) "*****************************************************"$
(%i45) " Substitutionsverfahren                              "$
```

(%i1) "=="$

(%i2) " Gleichungssystem mit 2 Unbekannten "$

(%i3) "=="$

(%i4) g1:a[1,1]*x+a[1,2]*y=a[1,3];

(%o4) $a_{1,2}\, y + a_{1,1}\, x = a_{1,3}$

(%i5) g2:a[2,1]*x+a[2,2]*y=a[2,3];

(%o5) $a_{2,2}\, y + a_{2,1}\, x = a_{2,3}$

(%i6) "=="$

(%i7) " Lösung mit SOLVE "$

(%i8) "=="$

(%i9) solve([g1,g2],[x,y]);

(%o9) $$[[x = -\frac{a_{1,3}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,3}}{a_{1,2}\, a_{2,1} - a_{1,1}\, a_{2,2}}, y = \frac{a_{1,3}\, a_{2,1} - a_{1,1}\, a_{2,3}}{a_{1,2}\, a_{2,1} - a_{1,1}\, a_{2,2}}]]$$

(%i10) "=="$

(%i11) " Lösung mit ALGSYS "$

(%i12) "=="$

(%i13) algsys([g1,g2],[x,y]);

(%o13) $$[[x = -\frac{a_{1,2}\, a_{2,3} - a_{1,3}\, a_{2,2}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}}, y = \frac{a_{1,1}\, a_{2,3} - a_{1,3}\, a_{2,1}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}}]]$$

(%i14) "=="$

(%i15) " Matrizenmethode "$

(%i16) "=="$

(%i17) A:coefmatrix([g1,g2],[x,y]);

(%o17) $$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

(%i18) b:matrix([a[1,3]], [a[2,3]]);

(%o18) $$\begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \end{bmatrix}$$

(%i19) B:invert(A);

(%o19) $$\begin{bmatrix} \frac{a_{2,2}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}} & -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}} \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}} & \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}} \end{bmatrix}$$

(%i20) x:B.b;

(%o20) $$\begin{bmatrix} \frac{a_{1,3}\, a_{2,2}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}} - \frac{a_{1,2}\, a_{2,3}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}} \\ \frac{a_{1,1}\, a_{2,3}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}} - \frac{a_{1,3}\, a_{2,1}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}} \end{bmatrix}$$

(%i22) `factor(x);`

(%o22) $$\begin{bmatrix} -\frac{a_{1,2}\, a_{2,3} - a_{1,3}\, a_{2,2}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}} \\ \frac{a_{1,1}\, a_{2,3} - a_{1,3}\, a_{2,1}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}} \end{bmatrix}$$

(%i23) `"=================================================="$`

(%i24) `" Eliminationsverfahren                            "$`

(%i25) `"=================================================="$`

(%i26) `g1;`

(%o26) $a_{1,2}\, y + a_{1,1}\, x = a_{1,3}$

(%i27) `g2;`

(%o27) $a_{2,2}\, y + a_{2,1}\, x = a_{2,3}$

(%i28) `"=================================================="$`

(%i29) `" Achtung: g1 und g2 nicht verändern              "$`

(%i30) `"=================================================="$`

(%i31) `glei1:g1*a[2,1];`

(%o31) $a_{2,1}\left(a_{1,2}\, y + a_{1,1}\, x\right) = a_{1,3}\, a_{2,1}$

(%i32) `glei2:g2*a[1,1];`

(%o32) $a_{1,1}\left(a_{2,2}\, y + a_{2,1}\, x\right) = a_{1,1}\, a_{2,3}$

(%i40) `g:glei1-glei2;`

(%o40) $a_{2,1}\left(a_{1,2}\, y + a_{1,1}\, x\right) - a_{1,1}\left(a_{2,2}\, y + a_{2,1}\, x\right) = a_{1,3}\, a_{2,1} - a_{1,1}\, a_{2,3}$

(%i41) `g:expand(g);`

(%o41) $a_{1,2}\, a_{2,1}\, y - a_{1,1}\, a_{2,2}\, y = a_{1,3}\, a_{2,1} - a_{1,1}\, a_{2,3}$

(%i42) `g:factor(g);`

(%o42) $-\left(a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}\right) y = -\left(a_{1,1}\, a_{2,3} - a_{1,3}\, a_{2,1}\right)$

(%i43) `g:g*(-1);`

(%o43) $\left(a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}\right) y = a_{1,1}\, a_{2,3} - a_{1,3}\, a_{2,1}$

(%i44) `g:g/(a[1,1]*a[2,2]-a[1,2]*a[2,1]);`

(%o44) $$y = \frac{a_{1,1}\, a_{2,3} - a_{1,3}\, a_{2,1}}{a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}}$$

(%i45) "==="$

(%i46) g1;

(%o46) $a_{1,2}\,y + a_{1,1}\,x = a_{1,3}$

(%i47) g2;

(%o47) $a_{2,2}\,y + a_{2,1}\,x = a_{2,3}$

(%i48) glei1:g1*a[2,2];

(%o48) $a_{2,2}\left(a_{1,2}\,y + a_{1,1}\,x\right) = a_{1,3}\,a_{2,2}$

(%i56) glei2:g2*a[1,2];

(%o56) $a_{1,2}\left(a_{2,2}\,y + a_{2,1}\,x\right) = a_{1,2}\,a_{2,3}$

(%i57) g:glei1-glei2;

(%o57) $a_{2,2}\left(a_{1,2}\,y + a_{1,1}\,x\right) - a_{1,2}\left(a_{2,2}\,y + a_{2,1}\,x\right) = a_{1,3}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,3}$

(%i58) g:expand(g);

(%o58) $a_{1,1}\,a_{2,2}\,x - a_{1,2}\,a_{2,1}\,x = a_{1,3}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,3}$

(%i59) g:factor(g);

(%o59) $\left(a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,1}\right)x = -\left(a_{1,2}\,a_{2,3} - a_{1,3}\,a_{2,2}\right)$

(%i60) g:g/(a[1,1]*a[2,2]-a[1,2]*a[2,1]);

(%o60) $x = -\dfrac{a_{1,2}\,a_{2,3} - a_{1,3}\,a_{2,2}}{a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,1}}$

(%i61) "==="$

(%i62) " Gleichsetzungsverfahren   "$

(%i63) "==="$

(%i64) g1;

(%o64) $a_{1,2}\,y + a_{1,1}\,x = a_{1,3}$

(%i65) g2;

(%o65) $a_{2,2}\,y + a_{2,1}\,x = a_{2,3}$

(%i66) glei1:g1-a[1,2]*y;

(%o66) $a_{1,1}\,x = a_{1,3} - a_{1,2}\,y$

(%i68) glei1:glei1/a[1,1];

(%o68) $x = \dfrac{a_{1,3} - a_{1,2}\,y}{a_{1,1}}$

(%i69) glei2:g2-a[2,2]*y;

(%o69) $a_{2,1}\,x = a_{2,3} - a_{2,2}\,y$

(%i70) glei2:glei2/a[2,1];

(%o70) $x = \frac{a_{2,3} - a_{2,2}\,y}{a_{2,1}}$

(%i71) "==="$

(%i72) " Gleichsetzen "$

(%i73) "==="$

(%i80) `g:(a[1,3]-a[1,2]*y)/a[1,1]=(a[2,3]-a[2,2]*y)/a[2,1];`

(%o80) $\frac{a_{1,3} - a_{1,2}\,y}{a_{1,1}} = \frac{a_{2,3} - a_{2,2}\,y}{a_{2,1}}$

(%i81) `g:expand(g);`

(%o81) $\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} - \frac{a_{1,2}\,y}{a_{1,1}} = \frac{a_{2,3}}{a_{2,1}} - \frac{a_{2,2}\,y}{a_{2,1}}$

(%i82) `g:g+a[2,2]*y/a[2,1]-a[1,3]/a[1,1];`

(%o82) $\frac{a_{2,2}\,y}{a_{2,1}} - \frac{a_{1,2}\,y}{a_{1,1}} = \frac{a_{2,3}}{a_{2,1}} - \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}$

(%i84) `g:factor(g);`

(%o84) $\frac{\left(a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,1}\right)\,y}{a_{1,1}\,a_{2,1}} = \frac{a_{1,1}\,a_{2,3} - a_{1,3}\,a_{2,1}}{a_{1,1}\,a_{2,1}}$

(%i85) `g:g*a[1,1]*a[2,1];`

(%o85) $\left(a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,1}\right)\,y = a_{1,1}\,a_{2,3} - a_{1,3}\,a_{2,1}$

(%i86) `g:g/(a[1,1]*a[2,2]-a[1,2]*a[2,1]);`

(%o86) $y = \frac{a_{1,1}\,a_{2,3} - a_{1,3}\,a_{2,1}}{a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,1}}$

(%i87) "==="$

(%i88) " Rückeinsetzen liefert x "$

(%i89) "==="$

(%i90) " Determinantenmethode "$

(%i91) "==="$

(%i94) `g1;`

(%o94) $a_{1,2}\,y + a_{1,1}\,x = a_{1,3}$

(%i95) `g2;`

(%o95) $a_{2,2}\,y + a_{2,1}\,x = a_{2,3}$

(%i96) `kill(x);`

(%o96) *done*

(%i97) `kill(y);`

(%o97) *done*

(%i98) `M:coefmatrix([g1,g2],[x,y]);`

(%o98) $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$

(%i99) `Mx:matrix([a[1,3],a[1,2]], [a[2,3],a[2,2]]);`

(%o99) $\begin{bmatrix} a_{1,3} & a_{1,2} \\ a_{2,3} & a_{2,2} \end{bmatrix}$

(%i100) `My:matrix([a[1,1],a[1,3]], [a[2,1],a[2,3]]);`

(%o100) $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{bmatrix}$

(%i101) `x:determinant(M)/determinant(Mx);`

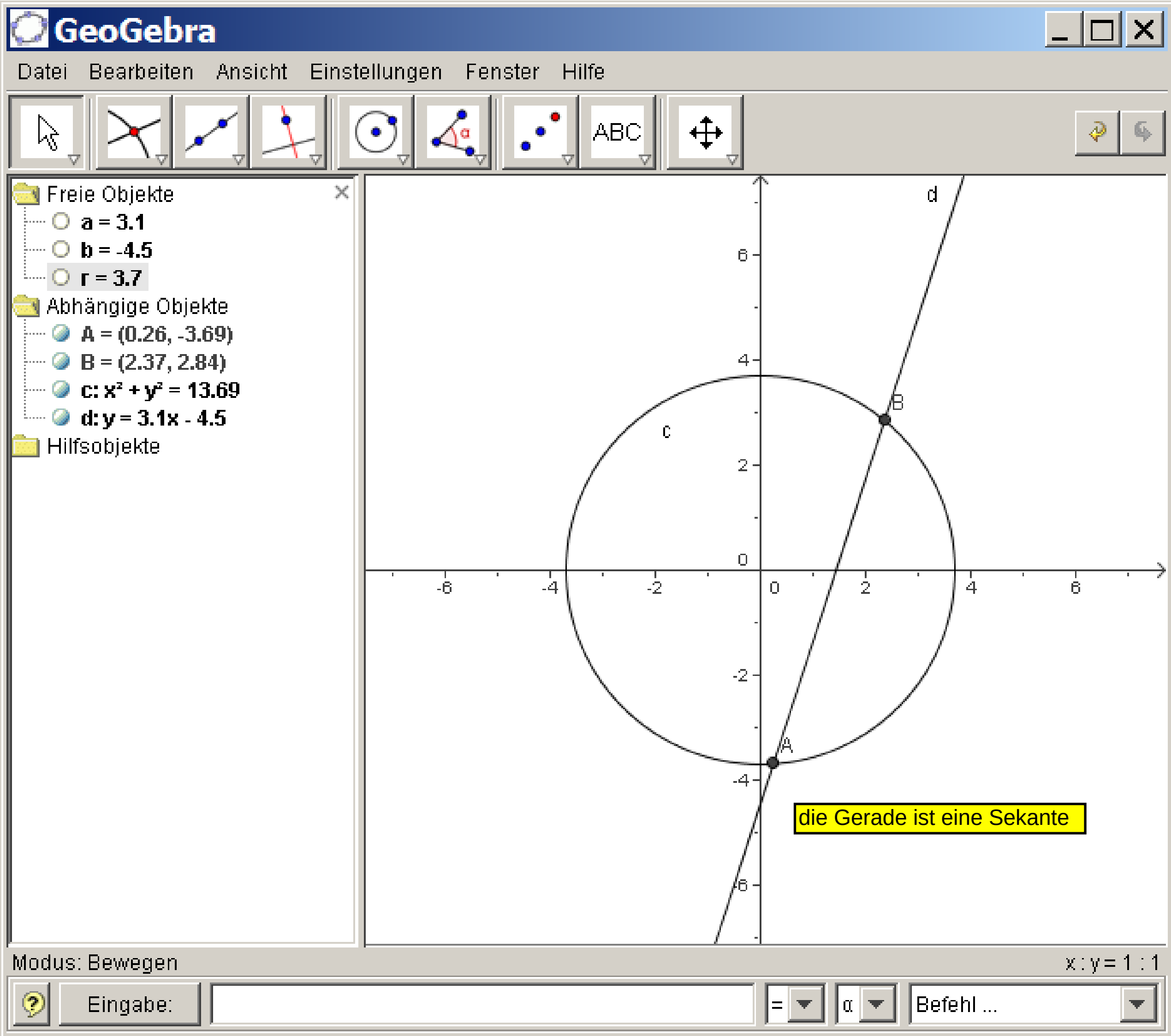
(%o101) $\dfrac{a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,1}}{a_{1,3}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,3}}$

(%i102) `y:determinant(M)/determinant(My);`

(%o102) $\dfrac{a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,1}}{a_{1,1}\,a_{2,3} - a_{1,3}\,a_{2,1}}$

(%i103)

Schnittpunkt von Kreis und Geraden



Schnittpunkte von Kreis und Gerade, Seite 2 von 2, Johann Weilharter HAK/HAS(HIT) Tamsweg

Die Lösung mit Maxima (Ermittlung der Schnittpunkte)

```
(%i1) kreis:x^2+y^2=13.69;
```

(%o1) $y^2 + x^2 = 13.69$

```
(%i2) gerade:y=3.1*x-4.5;
```

(%o2) $y = 3.1000000000000001\, x - 4.5$

```
(%i3) solve([kreis,gerade],[x,y]);
RAT replaced -13.69 by -1369//100 = -13.69
RAT replaced 4.5 by 9//2 = 4.5
RAT replaced -3.1 by -31//10 = -3.1
```

(%o3) $\left[\left[x = -\frac{\sqrt{1250009} - 1395}{1061} , y = -\frac{31\sqrt{1250009} + 4500}{10610} \right] , \left[x = \frac{\sqrt{1250009} + 1395}{1061} , y = \frac{31\sqrt{1250009} - 4500}{10610} \right] \right]$

```
(%i4) %,numer;
```

(%o4) $[[x = 0.26103862991045296 , y = - 3.6907802472775959] , [x = 2.3685560920499613 , y = 2.8425238853548813]]$

```
(%i5)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
```

(%i1) `"Lösung von kubischen Gleichungen"$`

(%i2) `"**************************************************"$`

(%i3) `g1:x^3-6*x+13=0;`

(%o3) $x^3 - 6\,x + 13 = 0$

(%i4) `g2:x^3+6*x^2+13*x=0;`

(%o4) $x^3 + 6\,x^2 + 13\,x = 0$

(%i5) `g3:x^3+6*x^2-13=0;`

(%o5) $x^3 + 6\,x^2 - 13 = 0$

(%i6) `"**************************************************"$`

(%i7) `solve(g1,x);`

(%o7) $$\left[x = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{137}}{2} - \frac{13}{2}\right)^{1/3}} + \left(\frac{\sqrt{137}}{2} - \frac{13}{2}\right)^{1/3}\left(-\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}\right), \; x = \left(\frac{\sqrt{137}}{2} - \frac{13}{2}\right)^{1/3}\left(\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2\left(-\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{137}}{2} - \frac{13}{2}\right)^{1/3}}, \; x = \left(\frac{\sqrt{137}}{2} - \frac{13}{2}\right)^{1/3} + \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{137}}{2} - \frac{13}{2}\right)^{1/3}} \right]$$

(%i8) `%,numer;`

(%o8) $[\, x = - 2.3116204564982792\,(0.8660254037844386\ \%i - 0.5) - 0.86519393543941359\,(- 0.8660254037844386\ \%i - 0.5)\, ,\ x = - 0.86519393543941359\,(0.8660254037844386\ \%i - 0.5) - 2.3116204564982792\,(- 0.8660254037844386\ \%i - 0.5)\, ,\ x = - 3.1768143919376928\,]$

(%i9) `"**************************************************"$`

(%i10) `solve(g2,x);`

(%o10) $[\, x = - 2\ \%i - 3\, ,\ x = 2\ \%i - 3\, ,\ x = 0\,]$

(%i11) `"**************************************************"$`

(%i12) `solve(g3,x);`

(%o12) $$\left[x = \left(-\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{247}\,\%i}{2} - \frac{3}{2}\right)^{1/3} + \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{247}\,\%i}{2} - \frac{3}{2}\right)^{1/3}} - 2\, , \; x = \left(\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left(\frac{\sqrt{247}\,\%i}{2}-\frac{3}{2}\right)^{1/3}+\frac{4\left(-\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{247}\,\%i}{2}-\frac{3}{2}\right)^{1/3}}-2\ ,\ x=\left(\frac{\sqrt{247}\,\%i}{2}-\frac{3}{2}\right)^{1/3}+\frac{4}{\left(\frac{\sqrt{247}\,\%i}{2}-\frac{3}{2}\right)^{1/3}}-2\ ]$$

(%i13) %,numer;

(%o13)
$$[\ x=(-0.866025403784438\,\%i-0.5)\,(7.858116822750855\,\%i-1.5)^{0.33333333333333331}+\frac{4\,(0.866025403784438\,\%i-0.5)}{(7.858116822750855\,\%i-1.5)^{0.33333333333333331}}-2\ ,\ x=$$
$$(0.866025403784438\,\%i-0.5)\,(7.858116822750855\,\%i-1.5)^{0.33333333333333331}+\frac{4\,(-0.866025403784438\,\%i-0.5)}{(7.858116822750855\,\%i-1.5)^{0.33333333333333331}}-2\ ,\ x=$$
$$(7.858116822750855\,\%i-1.5)^{0.33333333333333331}+\frac{4}{(7.858116822750855\,\%i-1.5)^{0.33333333333333331}}-2\ ]$$

(%i14) "***"$

(%i15) " Manchmal ist die Verwendung von ALLROOTS besser"$

(%i16) "***"$

(%i17) allroots(g1);

(%o17) [x = 1.252642111944524 6 %i + 1.588407195968846 4 , x = 1.588407195968846 4 - 1.252642111944524 6 %i , x = - 3.176814391937692 8]

(%i18) allroots(g2);

(%o18) [x = 0.0 , x = 1.9999999999999996 %i - 3.0 , x = - 1.9999999999999996 %i - 3.0]

(%i19) allroots(g3);

(%o19) [x = 1.33159580731342 , x = - 1.748677137372350 4 , x = - 5.582918669941069 1]

(%i20) "***"$

(%i21) " Die Lösungen sind übersichtlicher "$

(%i22) "***"$

(%i23) Anmerkung: vielleicht hat das mit dem bekannten Fehler von WXMAXIMA zu tun

und auch realroots ist eine gute Möglichkeit!

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) " Lösung von Polynomgleichungen mit ALLROOTS "$
(%i2) "*****************************************************"$
(%i3) g1:x^3=4*x^2+5*x;
(%o3)  x^3 = 4 x^2 + 5 x
(%i4) g2:x^3+10*x=7*x^2;
(%o4)  x^3 + 10 x = 7 x^2
(%i5) g3:4*x^3-2*x^2-5*x=0;
(%o5)  4 x^3 - 2 x^2 - 5 x = 0
(%i6) g4:x^4-12*x^3+35*x^2=0;
(%o6)  x^4 - 12 x^3 + 35 x^2 = 0
(%i7) g5:x^4+x^3+x^2=0;
(%o7)  x^4 + x^3 + x^2 = 0
(%i8) g6:x^3+2*x^2-2*x-1=0;
(%o8)  x^3 + 2 x^2 - 2 x - 1 = 0
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) " Diese Gleichungen sind gegeben "$
(%i11) "*****************************************************"$
(%i12) allroots(g1);
(%o12)  [ x = 0.0 , x = - 1.0 , x = 5.0 ]
(%i13) allroots(g2);
(%o13)  [ x = 0.0 , x = 2.0 , x = 5.0 ]
(%i14) allroots(g3);
(%o14)  [ x = 0.0 , x = - 0.89564392373895985 , x = 1.395643923738960 2 ]
(%i15) allroots(g4);
(%o15)  [ x = 0.0 , x = 0.0 , x = 4.9999999999999991 , x = 7.0000000000000018
]
(%i16) allroots(g5);
(%o16)  [ x = 0.0 , x = 0.0 , x = 0.86602540378443 86 %i - 0.5 , x = -
0.8660254037844386 %i - 0.5 ]
(%i17) allroots(g6);
(%o17)  [ x = - 0.38196601125010365 , x = 0.99999999999999911 , x = -
2.6180339887498953 ]
```

```
(%i18) "****************************************************"$
(%i19) " Das sind die Lösungen "$
(%i20) "****************************************************"$
(%i21)
```

Kontrolliere die reellen Lösungen mit realroots

```
(%i1)  "Näherungsverfahren"$
(%i2)  f(x):=x^2-8*x+12;
(%o2)   f(x) := x^2 - 8 x + 12
(%i3)  ab:diff(f(x),x);
(%o3)   2 x - 8
(%i4)  a(x):=2*x-8;
(%o4)   a(x) := 2 x - 8
(%i5)  "********************************************************"$
(%i6)  x[0]:7;
(%o6)   7
(%i7)  g(n):=x[n+1]:x[n]-f(x[n])/a(x[n]);
(%o7)   g(n) := x_(n + 1) : x_n - f(x_n)/a(x_n)
                                                   Newtonsche Näherung
(%i8)  "********************************************************"$
(%i9)  g(0),numer;
(%o9)   6.166666666666667
(%i10)  g(1);
(%o10)   6.0064102564102573
(%i11)  g(2);
(%o11)   6.0000102400262145
(%i12)  g(3);
(%o12)   6.0000000000262146
(%i13)  "********************************************************"$
(%i14)  x[0]:-5;
(%o14)   - 5
(%i15)  g(0),numer;
(%o15)   - 0.72222222222222232
(%i16)  g(1);
(%o16)   1.2153594771241829
(%i17)  g(2);
(%o17)   1.8894541781818543
(%i18)  g(3);
(%o18)   1.9971049245661672
(%i19)  g(4);
(%o19)   1.9999979076632943
(%i20)  g(5);
(%o20)   1.9999999999989053
(%i21)  g(6);
```

```
(%o21)  2.0
(%i22) g(7);
(%o22)  2.0
(%i23) "****************************************************"$
(%i24)
```

Beispiele zum Newtonverfahren

Erste Aufgabe:

$f(x) = \sin(x)$

	x	f(x)	f´(x)
x0	= 1		
x1	= -0,55740772	0,84147098	0,54030231
x2	= 0,065936452	-0,5289881	0,84862924
x3	= -0,00009572	0,065888685	0,99782698
x4	= 0,00000000	-0,00009572	1
x5	= 0	0,00000000	1
x6	= 0	0	1
x7	= 0	0	1

Lösung mit Maxima:

(%i1) `f(x):=sin(x);`

(%o1) $f(x) := \sin(x)$

(%i2) `ab:diff(f(x),x);`

(%o2) $\cos(x)$

(%i3) `a(x):=cos(x);`

(%o3) $a(x) := \cos(x)$

(%i4) `x[0]:1;`

(%o4) 1

(%i8) `g(n):=x[n]:x[n-1]-f(x[n-1])/a(x[n-1]);`

(%o8) $g(n) := x_n : x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{a(x_{n-1})}$

Das Newtonverfahren wird durchgeführt:

```
(%i9)  g(1),numer;
(%o9)  - 0.5574077246549
(%i10) g(2);
(%o10) 0.065936451924841
(%i11) g(3);
(%o11) - 9.5721919325081339 10^-5
(%i12) g(4);
(%o12) 2.9235662014123059 10^-13
(%i13) g(5);
(%o13) 0.0
(%i14) g(6);
(%o14) 0.0
```

Zweite Aufgabe:

f(x) = sin(x) + exp(x)

	x	f(x)	f´(x)
x0	= 1		
x1	= -0,092423171	3,5597528	3,2585841
x2	= -0,52201612	0,81942761	1,9074513
x3	= -0,58686912	0,094694383	1,4601388
x4	= -0,58853164	0,0023088159	1,388744
x5	= -0,58853274	0,00000153	1,3868986
x6	= -0,58853274	0,00000000	1,3868973
x7	= -0,58853274	0	1,3868973
x8	= -0,58853274	0	1,3868973

Lösung mit Maxima:

```
(%i1) f(x):=sin(x)+exp(x);
```

(%o1) $f(x) := sin(x) + exp(x)$

```
(%i2) ab:diff(f(x),x);
```

(%o2) $cos(x) + \%e^{x}$

```
(%i3) a(x):=cos(x)+exp(x);
```

(%o3) $a(x) := cos(x) + exp(x)$

```
(%i5) x[0]:1.0;
```

(%o5) 1.0

```
(%i6) g(n):=x[n]:x[n-1]-f(x[n-1])/a(x[n-1]);
```

(%o6) $g(n) := x_{n} : x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{a(x_{n-1})}$

```
(%i7) makelist(g(n),n,1,7);
```

(%o7) [- 0.092423171084377 , - 0.52201611509868 , - 0.58686911711353 , - 0.58853163793609 , - 0.58853274398137 , - 0.58853274398186 , - 0.58853274398186]

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Die merkwürdigste Gleichung "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) %e^(%i*%pi);
```

diese Gleichung ist wirklich interessant

```
(%o4)  - 1
(%i5) "****************************************************"$
(%i6) " %e ist die Eulersche Zahl "$
(%i7) " %i ist die imaginäre Einheit "$
(%i8) " %pi ist die Kreiszahl "$
(%i9) "****************************************************"$
(%i10)
```

Zeile 4: eine wirklich interessante Gleichung

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Nichtlineares Gleichungssystem                      "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) g1:1/x-1/y=1/36;
```

(%o4) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{36}$

```
(%i5) g2:x*y^2-x^2*y=324;
```

(%o5) $x\,y^2 - x^2\,y = 324$

```
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) solve([g1,g2],[x,y]);
```

(%o7) $\left[\left[x = \frac{72}{\sqrt{47}\,\%i + 1}, y = -\frac{3\sqrt{47}\,\%i + 3}{2}\right], \left[x = -\frac{72}{\sqrt{47}\,\%i - 1}, y = \frac{3\sqrt{47}\,\%i - 3}{2}\right], [x = 9, y = 12], [x = -12, y = -9]\right]$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) " Das sind die Lösungen                               "$
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Lösen von Polynomgleichungen "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) a:x^2-8*x+15;
```

(%o4) $x^2 - 8\,x + 15$

```
(%i5) allroots(a);
```

(%o5) $[\, x = 3.0 \,,\, x = 5.0 \,]$

```
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) b:a*(x+4);
```

(%o7) $(x + 4)\left(x^2 - 8\,x + 15\right)$

```
(%i8) expand(%);
```

(%o8) $x^3 - 4\,x^2 - 17\,x + 60$

```
(%i9) allroots(%);
```

(%o9) $[\, x = 3.0 \,,\, x = -4.0 \,,\, x = 5.0 \,]$

```
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) c:b*(x-10);
```

(%o11) $(x - 10)(x + 4)\left(x^2 - 8\,x + 15\right)$

```
(%i12) expand(%);
```

(%o12) $x^4 - 14\,x^3 + 23\,x^2 + 230\,x - 600$

```
(%i13) allroots(%);
```

(%o13) $[\, x = 3.0000000000000004 \,,\, x = -4.0 \,,\, x = 4.9999999999999982 \,,\, x = 10.000000000000002 \,]$

```
(%i14) "*****************************************************"$
(%i15) " ALLROOTS ist manchmal ungenau "$
(%i16) "*****************************************************"$
(%i17)
```

Kontrolliere die Gleichungen mit REALROOTS

Aufgabe 1

x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = 0
L = {-1}

Lösung mit Maxima

```
(%i1) g:x^4 + 4*x^3 + 6*x^2 + 4*x + 1 = 0;
```

(%o1) $x^4+4x^3+6x^2+4x+1=0$

```
(%i2) solve(g,x);
```

(%o2) $[x=-1]$

```
(%i3) realroots(g);
```

(%o3) $[x=-1]$

Aufgabe 2

x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x = 0
L = {-2; 0}

Lösung mit Maxima

```
(%i1) g:x^4 + 4*x^3 + 6*x^2 + 4*x = 0;
```

(%o1) $x^4+4x^3+6x^2+4x=0$

```
(%i2) realroots(g);
```

(%o2) $[x=-2, x=0]$

```
(%i3) solve(g,x);
```

(%o3) [x = - %i - 1 , x = %i - 1 , x = - 2 , x = 0]

Aufgabe 3

x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1 = 0
L = {-2,18921; 0,189207}

Lösung mit Maxima

```
(%i1) g:x^4 + 4*x^3 + 6*x^2 + 4*x - 1 = 0;
```

(%o1) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1 = 0$

```
(%i2) realroots(g);
```

(%o2) $[\, x = -\frac{73457601}{33554432}, x = \frac{6348737}{33554432} \,]$

```
(%i3) %,numer;
```

(%o3) $[\, x = -2.18920710682869, x = 0.18920710682869 \,]$

Aufgabe 4

x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 2 = 0
L = {-2,31607; 0,316074}

Lösung mit Maxima

```
(%i1) g:x^4 + 4*x^3 + 6*x^2 + 4*x - 2 = 0;
```

(%o1) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 2 = 0$

```
(%i2) realroots(g);
```

(%o2) $[\, x = -\frac{77714547}{33554432}, x = \frac{10605683}{33554432} \,]$

```
(%i3) %,numer;
```

(%o3) $[\, x = -2.3160739839077, x = 0.3160739839077 \,]$

Aufgabe 5

2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 2 = 0
L = {-1,31499; 0,314993}

Lösung mit Maxima

```
(%i1) g:2*x^4 + 4*x^3 + 6*x^2 + 4*x - 2 = 0;
```

(%o1) $2x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 2 = 0$

```
(%i2) realroots(g);
```

(%o2) $[\, x = -\frac{44123843}{33554432}, x = \frac{10569411}{33554432} \,]$

```
(%i3) %,numer;
```

(%o3) $[\, x = -1.314992994070053, x = 0.31499299407005 \,]$

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i3) " Bestimme eine Parabel aus 3 Punkten                 "$
(%i4) "*****************************************************"$
(%i5) x1:-2.13;
(%o5)  - 2.129999999999999
(%i6) y1:6.73;
(%o6)  6.730000000000004
(%i7) x2:2.47;
(%o7)  2.469999999999998
(%i8) y2:-3.08;
(%o8)  - 3.080000000000001
(%i9) x3:4.47;
(%o9)  4.469999999999998
(%i10)  y3:5.85;
(%o10)  5.849999999999996
```

dieser Anzeigefehler von WXMAXIMA ist bekannt

```
(%i11) "*****************************************************"$
(%i12) " Das sind die koordinaten der drei Punkte            "$
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14) g(x,y):=y=a*x^2+b*x+c;
(%o14)  g(x , y) := y = a x^2 + b x + c
(%i15) "*****************************************************"$
(%i16) " Allgemeiner Ansatz                                  "$
(%i17) "*****************************************************"$
(%i18) g1:g(x1,y1);
(%o18)  6.730000000000004 = c - 2.129999999999999 b + 4.536899999999993
a
(%i19) g2:g(x2,y2);
(%o19)  - 3.080000000000001 = c + 2.469999999999998 b +
6.100899999999984 a
(%i20) g3:g(x3,y3);
(%o20)  5.849999999999996 = c + 4.469999999999998 b + 19.98089999999998
a
(%i21) "*****************************************************"$
(%i22) " Das sind die Gleichungen                            "$
(%i23) "*****************************************************"$
(%i24) solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);
RAT replaced 6.73 by 673//100 = 6.73
RAT replaced -4.5369 by -21455//4729 = -4.53689997885388
RAT replaced 2.13 by 213//100 = 2.13
```

```
RAT replaced -3.08 by -77//25 = -3.08
RAT replaced -6.1009 by -12879//2111 = -6.10090004737091
RAT replaced -2.47 by -247//100 = -2.47
RAT replaced 5.85 by 117//20 = 5.85
RAT replaced -19.9809 by -61721//3089 = -19.9808999676271
RAT replaced -4.47 by -447//100 = -4.47
```

(%o24) $[[a = \frac{935879299370059}{936218501206000}, b = -\frac{231478669242811}{93621850120600}, c = -\frac{28757359152772993}{9362185012060000}]]$

(%i25) %,numer;

(%o25) [[a = 0.99963768945443388 , b = - 2.472485524956292 , c = -
3.0716503803042654]]

(%i26) y=x^2-2.47*x-3.07;

(%o26) $y = x^2 - 2.4699999999999998\ x - 3.0699999999999998$

(%i27) "***"$

(%i28) " das ist die gesuchte Parabel   "$

(%i29) "***"$

(%i30)

```
(%i1) g1:x^2+2*x+26=0;
            2
(%o1)      x  + 2 x + 26 = 0
(%i2) g2:x^2+6*x+10=0;
            2
(%o2)      x  + 6 x + 10 = 0
(%i3) g3:4*x^2-4*x+5=0;
              2
(%o3)      4 x  - 4 x + 5 = 0
(%i4) g4:4*x^2-4*x+37=0;
              2
(%o4)      4 x  - 4 x + 37 = 0
(%i5) g5:x^2-6*x+10=0;
            2
(%o5)      x  - 6 x + 10 = 0
(%i6) g6:x^2-4*x+5=0;
            2
(%o6)      x  - 4 x + 5 = 0
(%i7) g7:4*x^2-2*x+7=0;
              2
(%o7)      4 x  - 2 x + 7 = 0
(%i8) g8:8*x^2-12*x+17=0;
              2
(%o8)      8 x  - 12 x + 17 = 0
(%i9) g9:x^2+18*x+97=0;
            2
(%o9)      x  + 18 x + 97 = 0
(%i10) g10:x^2+x+1=0;
            2
(%o10)     x  + x + 1 = 0
(%i11) g11:4*x^2-12*x+15=0;
              2
(%o11)     4 x  - 12 x + 15 = 0
(%i12) g12:16*x^2-64*x+89=0;
               2
(%o12)     16 x  - 64 x + 89 = 0
(%i13) solve(g1,x);
(%o13)     [ x = - 5 %i - 1 , x = 5 %i - 1 ]
(%i14) solve(g2,x);
(%o14)     [ x = - %i - 3 , x = %i - 3 ]
(%i15) solve(g3,x);
                 2 %i - 1        2 %i + 1
(%o15)     [ x = - -------- , x = -------- ]
                    2               2
(%i16) solve(g4,x);
                 6 %i - 1        6 %i + 1
(%o16)     [ x = - -------- , x = -------- ]
                    2               2
(%i17) solve(g5,x);
(%o17)     [ x = 3 - %i , x = %i + 3 ]
(%i18) solve(g6,x);
```

(%o18) $[x = 2 - \%i, x = \%i + 2]$

(%i19) solve(g7,x);

(%o19) $$\left[x = -\frac{3\sqrt{3}\,\%i - 1}{4}, x = \frac{3\sqrt{3}\,\%i + 1}{4}\right]$$

(%i20) solve(g8,x);

(%o20) $$\left[x = -\frac{5\,\%i - 3}{4}, x = \frac{5\,\%i + 3}{4}\right]$$

(%i21) solve(g9,x);

(%o21) $[x = -4\,\%i - 9, x = 4\,\%i - 9]$

(%i22) solve(g10,x);

(%o22) $$\left[x = -\frac{\sqrt{3}\,\%i + 1}{2}, x = \frac{\sqrt{3}\,\%i - 1}{2}\right]$$

(%i23) solve(g11,x);

(%o23) $$\left[x = -\frac{\sqrt{6}\,\%i - 3}{2}, x = \frac{\sqrt{6}\,\%i + 3}{2}\right]$$

(%i24) solve(g12,x);

(%o24) $$\left[x = -\frac{5\,\%i - 8}{4}, x = \frac{5\,\%i + 8}{4}\right]$$

```
(%i25) "*****************************************************"$
(%i26) " Alle Gleichungen haben komplexe Lösungen           "$
(%i27) "*****************************************************"$
(%i28)
```

(%i1) p:x^2-8*x+17;

(%o1) $x^2 - 8\ x + 17$

(%i2) realroots(p);

(%o2) [ ]

realroots() sucht ausschließlich reelle (und keine komplexen) Nullstellen

(%i3) allroots(p);

(%o3) $[\ x = 1.0\ \%i + 4.0\ ,\ x = 4.0 - 1.0\ \%i\ ]$

(%i4) "=="$

(%i5) p:x^2-8*x+16;

(%o5) $x^2 - 8\ x + 16$

(%i6) realroots(p);

(%o6) $[\ x = 4\ ]$

(%i7) allroots(p);

(%o7) $[\ x = 4.0\ ,\ x = 4.0\ ]$

(%i8) "=="$

(%i9) p:x^2-8*x+15;

(%o9) $x^2 - 8\ x + 15$

(%i10) realroots(p);

(%o10) $[\ x = 3\ ,\ x = 5\ ]$

(%i11) allroots(p);

(%o11) $[\ x = 3.0\ ,\ x = 5.0\ ]$

(%i12) "=="$

(%i15)

```
(%i1) "***************************************************"$
(%i2) " Wann ist diese Matrix singulär???                  "$
(%i3) " Anmerkung: eine Matrix ist singulär, wenn die      "$
(%i4) " Determinante = NULL ist                            "$
(%i5) "***************************************************"$
(%i6) A:matrix([a,1,9], [1,0,a], [2,1,1]);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} a & 1 & 9 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i7) det:determinant(A);
```

(%o7) $-a^2+2a+8$

```
(%i8) solve(det=0,a);
```

(%o8) $[a=-2, a=4]$

```
(%i9) "***************************************************"$
(%i10) " Für diese Werte ist die Matrix singulär            "$
(%i11) "***************************************************"$
(%i12)
```

Gleichungen: wann sind die Matrizen singuär?

```
(%i1) "========================================================="$
(%i2) " Singuläre Matrizen                                      "$
(%i3) "========================================================="$
(%i4) A:matrix([1,a,1], [-3,2,4], [a,-2,1]);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ a & -2 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i5) determinant(A);
```

(%o5) $-\left(-4\,a-3\right)a-2\,a+16$

```
(%i6) solve(%=0,a);
```

(%o6) $\left[a=-\frac{\sqrt{255}\,\%i+1}{8},\ a=\frac{\sqrt{255}\,\%i-1}{8}\right]$

```
(%i7) "========================================================="$
(%i8) " Für alle reellen Werte von A ist diese Matrix           "$
(%i9) " regulär                                                 "$
(%i10) "========================================================="$
(%i11) B:matrix([1,11,a], [0,a,2], [-4,3,1]);
```

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 11 & a \\ 0 & a & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i12) determinant(B);
```

(%o12) $4\,a^2+a-94$

```
(%i13) solve(%,a);
```

(%o13) $\left[a=-\frac{\sqrt{1505}+1}{8},\ a=\frac{\sqrt{1505}-1}{8}\right]$

```
(%i14) %,numer;
```

(%o14) $[a=-4.9742911853177061\ ,\ a=4.7242911853177061\ ]$

```
(%i15) "========================================================="$
(%i16) " Für diese Werte ist die Matrix singulär                 "$
(%i17) "========================================================="$
(%i18) C:matrix([-5,a,2], [a,3,1], [0,a,2]);
```

(%o18) $\begin{bmatrix} -5 & a & 2 \\ a & 3 & 1 \\ 0 & a & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i19) determinant(C);
```

(%o19) $-5\left(6-a\right)$

```
(%i20) solve(%=0,a);
```

```
(%o20)  [ a = 6 ]
(%i21) "======================================================"$
(%i22) " Für diesen Wert ist die Matrix singulär             "$
(%i23) "======================================================"$
(%i24)
```

```
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Einfache Wurzelgleichungen                          "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) g1:sqrt(2*x)=8;
```
(%o4) $\sqrt{2}\,\sqrt{x} = 8$

```
(%i5) solve(g1,x);
```
(%o5) $[\, x = 32 \,]$

Achtung: nur einfachste Wurzelgleichungen sind mit solve() lösbar

```
(%i6) "****************************************************"$
(%i7) g2:sqrt(6*x)-5=1;
```
(%o7) $\sqrt{6}\,\sqrt{x} - 5 = 1$

```
(%i8) solve(g2,x);
```
(%o8) $[\, x = 6 \,]$

```
(%i9) "****************************************************"$
(%i10) g3:4*sqrt(3*x)-11=1;
```
(%o10) $4\,\sqrt{3}\,\sqrt{x} - 11 = 1$

```
(%i11) solve(g3,x);
```
(%o11) $[\, x = 3 \,]$

```
(%i12) "****************************************************"$
(%i13) g4:sqrt(x-2)=1;
```
(%o13) $\sqrt{x - 2} = 1$

```
(%i14) solve(g4,x);
```
(%o14) $[\, x = 3 \,]$

```
(%i15) "****************************************************"$
(%i16) g5:20=sqrt(15-x);
```
(%o16) $20 = \sqrt{15 - x}$

```
(%i17) solve(g5,x);
```
(%o17) $[\, x = - 385 \,]$

```
(%i18) "****************************************************"$
(%i19) g6:4*sqrt(x+3)-15=5;
```
(%o19) $4\,\sqrt{x + 3} - 15 = 5$

```
(%i20) solve(g6,x);
```
(%o20) $[\, x = 22 \,]$

```
(%i21) "****************************************************"$
(%i22) g7:g7:5*sqrt(3*x+1)=3*sqrt(5*x+25);
```
(%o22) $5\,\sqrt{3\,x + 1} = 3\,\sqrt{5\,x + 25}$

```
(%i23) solve(g7,x);
```
(%o23) $\left[\, \sqrt{5\,x + 25} = \frac{5\,\sqrt{3\,x + 1}}{3} \,\right]$

(%i24) g7:g7^2;

(%o24) $25\,(3\,x+1) = 9\,(5\,x+25)$

(%i25) solve(%,x);

(%o25) $[x = \frac{20}{3}]$

(%i26) "**"$

(%i27) " Quadrieren hilft   "$

(%i28) "**"$

(%i29) g8:4*sqrt(4*x+1)=3*sqrt(7*x+2);

(%o29) $4\sqrt{4\,x+1} = 3\sqrt{7\,x+2}$

(%i30) solve(g8,x);

(%o30) $[\sqrt{7\,x+2} = \frac{4\sqrt{4\,x+1}}{3}]$

(%i31) g8:g8^2;

(%o31) $16\,(4\,x+1) = 9\,(7\,x+2)$

(%i32) solve(g8,x);

(%o32) $[x = 2]$

(%i33) "**"$

(%i34) g9:5*sqrt(x)-1=7*sqrt(x)-5;

(%o34) $5\sqrt{x} - 1 = 7\sqrt{x} - 5$

(%i35) solve(g9,x);

(%o35) $[x = 4]$

(%i36) "**"$

(%i37) g10:7*sqrt(x)+9=6*(3*sqrt(x)-4);

(%o37) $7\sqrt{x} + 9 = 6\,(3\sqrt{x} - 4)$

(%i38) solve(g10,x);

(%o38) $[x = 9]$

(%i39) "**"$

(%i40) g11:sqrt(x+3)-sqrt(x)=1;

(%o40) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 1$

(%i41) solve(g11,x);

(%o41) $[\sqrt{x} = \sqrt{x+3} - 1]$

(%i42) g11:g11^2;

(%o42) $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})^2 = 1$

(%i43) g11:expand(g11);

(%o43) $-2\sqrt{x}\sqrt{x+3} + 2\,x + 3 = 1$

(%i44) g11:g11-2*x-3;

(%o44) $-2\sqrt{x}\sqrt{x+3}=-2x-2$

(%i45) `g11:g11^2;`

(%o45) $4x(x+3)=(-2x-2)^2$

(%i46) `solve(g11,x);`

(%o46) $[x=1]$

(%i47) `"*****************************************************"$`

(%i48) `g12:sqrt(x+14)+sqrt(x+7)=7;`

(%o48) $\sqrt{x+14}+\sqrt{x+7}=7$

(%i49) `g12:g12^2;`

(%o49) $\left(\sqrt{x+14}+\sqrt{x+7}\right)^2=49$

(%i50) `g12:expand(g12);`

(%o50) $2\sqrt{x+7}\sqrt{x+14}+2x+21=49$

(%i51) `g12:g12-2*x-21;`

(%o51) $2\sqrt{x+7}\sqrt{x+14}=28-2x$

(%i52) `g12:g12^2;`

(%o52) $4(x+7)(x+14)=(28-2x)^2$

(%i53) `solve(g12,x);`

(%o53) $[x=2]$

durch Quadrieren werden die Wurzeln entfernt

diese Technik muss man auch ohne CAS verwenden

(%i54) `"*****************************************************"$`

(%i55) `g13:sqrt(x+9)-sqrt(x-4)=1;`

(%o55) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x-4}=1$

(%i56) `g13:g13^2;`

(%o56) $\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-4}\right)^2=1$

(%i57) `g13:expand(g13);`

(%o57) $-2\sqrt{x-4}\sqrt{x+9}+2x+5=1$

(%i58) `g13:g13-2*x-5;`

(%o58) $-2\sqrt{x-4}\sqrt{x+9}=-2x-4$

(%i59) `g13:g13^2;`

(%o59) $4(x-4)(x+9)=(-2x-4)^2$

(%i60) `solve(g13,x);`

(%o60) $[x=40]$

(%i62) `"*****************************************************"$`

(%i63) `g14:sqrt(x+4)+sqrt(x+11)=sqrt(4*x+29);`

(%o63) $\sqrt{x+11}+\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+29}$

(%i64) `g14:g14^2;`

(%o64) $\left(\sqrt{x+11}+\sqrt{x+4}\right)^2 = 4\,x+29$

(%i65) `g14:expand(g14);`

(%o65) $2\,\sqrt{x+4}\,\sqrt{x+11}+2\,x+15 = 4\,x+29$

(%i66) `g14:g14-2*x-15;`

(%o66) $2\,\sqrt{x+4}\,\sqrt{x+11} = 2\,x+14$

(%i67) `g14:g14^2;`

(%o67) $4\,(x+4)\,(x+11) = (2\,x+14)^2$

(%i68) `solve(g14,x);`

(%o68) $[\,x = 5\,]$

(%i69) `"****************************************************"$`

(%i70) `g15:sqrt(x+12)-sqrt(x-3)=sqrt(x+32)-sqrt(x+5);`

(%o70) $\sqrt{x+12}-\sqrt{x-3} = \sqrt{x+32}-\sqrt{x+5}$

(%i71) `g15:g15^2;`

(%o71) $\left(\sqrt{x+12}-\sqrt{x-3}\right)^2 = \left(\sqrt{x+32}-\sqrt{x+5}\right)^2$

(%i72) `g15:expand(g15);`

(%o72) $-2\,\sqrt{x-3}\,\sqrt{x+12}+2\,x+9 = -2\,\sqrt{x+5}\,\sqrt{x+32}+2\,x+37$

(%i73) `g15:g15-2*x-9;`

(%o73) $-2\,\sqrt{x-3}\,\sqrt{x+12} = 28-2\,\sqrt{x+5}\,\sqrt{x+32}$

(%i74) `g15:g15^2;`

(%o74) $4\,(x-3)\,(x+12) = \left(28-2\,\sqrt{x+5}\,\sqrt{x+32}\right)^2$

(%i75) `g15:expand(g15);`

(%o75) $4\,x^2+36\,x-144 = -112\,\sqrt{x+5}\,\sqrt{x+32}+4\,x^2+148\,x+1424$

(%i76) `g15:g15-4*x^2-148*x-1424;`

(%o76) $-112\,x-1568 = -112\,\sqrt{x+5}\,\sqrt{x+32}$

(%i77) `g15:g15^2;`

(%o77) $(-112\,x-1568)^2 = 12544\,(x+5)\,(x+32)$

(%i78) `solve(g15,x);`

(%o78) $[\,x = 4\,]$

(%i79) `"****************************************************"$`

(%i80)

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Koeffizientenmatrix "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) g1:x+y=5;
(%o4)  y + x = 5
(%i5) g2:x-y=-1;
(%o5)  x - y = - 1
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) A:coefmatrix([g1,g2],[x,y]);
```

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) g1:x+y+z=3;
(%o9)  z + y + x = 3
(%i10) g2:2*x-y+3*z=4;
(%o10)  3 z - y + 2 x = 4
(%i11) g3:-2*x+y-5*z=-6;
(%o11)  - 5 z + y - 2 x = - 6
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) B:coefmatrix([g1,g2,g3],[x,y,z]);
```

$$(\%o13)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

```
(%i14) "*****************************************************"$
(%i16) determinant(A);
(%o16)  - 2
(%i17) determinant(B);
(%o17)  6
(%i18) "*****************************************************"$
(%i19) invert(A);
```

(%o19) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(%i20) `invert(B);`

(%o20) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(%i21)

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Gleichungssystem                                 "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) g1:-x+10*y+5*z=3;
(%o4)  5 z + 10 y - x = 3
(%i5) g2:3*x-6*y-2*z=-2;
(%o5)  - 2 z - 6 y + 3 x = - 2
(%i6) g3:-8*x+14*y+4*z=6;
(%o6)  4 z + 14 y - 8 x = 6
(%i7) "**************************************************"$
(%i8) solve([g1,g2,g3],[x,y,z]);
(%o8)  [ [ x = 2 , y = 3 , z = - 5 ] ]
(%i9) "**************************************************"$
(%i10) A:coefmatrix([g1,g2,g3],[x,y,z]);
```

Gleichungen sind Objekte

eine alternative Möglichkeit ist algsys()

(%o10) $\begin{bmatrix} -1 & 10 & 5 \\ 3 & -6 & -2 \\ -8 & 14 & 4 \end{bmatrix}$

```
(%i11) b:matrix([3], [-2], [6]);
```

(%o11) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

```
(%i12) x:invert(A).b;
```

(%o12) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

```
(%i13) "**************************************************"$
(%i14) " Die Matrizenmethode hat dasselbe Resultat       "$
(%i15) "**************************************************"$
(%i16)
```

```
(%i1) "***************************************************"$
(%i2) " Funktion dritten Grades bestimmen                  "$
(%i3) "***************************************************"$
(%i4) load(vect);
(%o4)
C:/Programme/Maxima-5.9.1/share/maxima/5.9.1/share/vector/vect.mac
```

der Aufruf des Vektoren-Unterprogramms findet keine weitere Verwendung

```
(%i5) x:[10,44,82,102];
(%o5)  [ 10 , 44 , 82 , 102 ]
(%i6) y:1*x^3+2*x^2+3*x+4;
(%o6)  [ 1234 , 89192 , 565066 , 1082326 ]
(%i7) kill(all);
(%o0)  DONE
(%i1) "***************************************************"$
(%i2) x1:10;
(%o2)  10
(%i3) y1:1234;
(%o3)  1234
(%i4) x2:44;
(%o4)  44
(%i5) y2:89192;
(%o5)  89192
(%i6) x3:82;
(%o6)  82
(%i7) y3:565066;
(%o7)  565066
(%i8) x4:102;
(%o8)  102
(%i9) y4:1082326;
(%o9)  1082326
(%i10) "***************************************************"$
(%i19) g(x,y):=y=a*x^3+b*x^2+c*x+d;
```

(%o19) $g(x, y) := y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$

```
(%i20) "***************************************************"$
(%i21) g1:g(x1,y1);
(%o21)  1234 = d + 10 c + 100 b + 1000 a
(%i22) g2:g(x2,y2);
(%o22)  89192 = d + 44 c + 1936 b + 85184 a
(%i23) g3:g(x3,y3);
```

```
(%o23)  565066 = d + 82 c + 6724 b + 551368 a
(%i24) g4:g(x4,y4);
(%o24)  1082326 = d + 102 c + 10404 b + 1061208 a
(%i25) "*****************************************************"$
(%i26) solve([g1,g2,g3,g4],[a,b,c,d]);
(%o26)  [ [ a = 1 , b = 2 , c = 3 , d = 4 ] ]
(%i27) y=1*x^3+2*x^2+3*x+4;
```

$$y = x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 4 \qquad (\%o27)$$

```
(%i28) "*****************************************************"$
(%i29) " Das ist die Lösung                                  "$
(%i30) "*****************************************************"$
(%i31)
```

(%i1) `g1:2*x+6*y+z=9;`

(%o1) $z + 6\,y + 2\,x = 9$

(%i2) `g2:3*x-2*y+2*z=3;`

(%o2) $2\,z - 2\,y + 3\,x = 3$

(%i3) `g3:-x+3*y-z=1;`

(%o3) $-z + 3\,y - x = 1$

(%i4) `A:coefmatrix([g1,g2,g3],[x,y,z]);`

(%o4) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(%i5) `b:matrix([9], [3], [1]);`

(%o5) $\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(%i6) `X:matrix([x1], [x2], [x3]);`

(%o6) $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$

Erzeugung von Spaltenvektoren

(%i7) `Gleichung:A.X=b;`

(%o7) $\begin{bmatrix} x3 + 6\,x2 + 2\,x1 \\ 2\,x3 - 2\,x2 + 3\,x1 \\ -x3 + 3\,x2 - x1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(%i9) `"****************************************************"$`

(%i10) `" Lösung über inverse Matrix                          "$`

(%i11) `"****************************************************"$`

(%i12) `Loesung:X=invert(A).b;`

(%o12) $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(%i13)

Linearkombination von Vektoren

Aufgabe 1

```
    | 1 |       | 3 |       | 4 |     |  2 |
  a·| 2 | + b·|-2 | + c·| 8 | = | 10 |
    | 3 |       | 1 |       | 7 |     | -5 |
```

Lösung :
  a = -9,35   b = -0,75   c = 3,4

Kontrolle mit Maxima

(%i1) g1:a+3*b+4*c=2;

(%o1) $4\,c+3\,b+a=2$

(%i2) g2:2*a-2*b+8*c=10;

(%o2) $8\,c-2\,b+2\,a=10$

(%i3) g3:3*a+b+7*c=-5;

(%o3) $7\,c+b+3\,a=-5$

(%i4) solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);

(%o4) $[\,[\,a=-\frac{187}{20}\,,\,b=-\frac{3}{4}\,,\,c=\frac{17}{5}\,]\,]$

(%i5) %,numer;

(%o5) $[\,[\,a=-9.35\,,\,b=-0.75\,,\,c=3.4\,]\,]$

Aufgabe 2

```
    | 1 |       | 3 |       | 4 |     | 200 |
  a·| 2 | + b·|-2 | + c·| 8 | = |  10 |
    | 3 |       | 1 |       | 7 |     |-500 |
```

Lösung :
  a = -514,25   b = 48,75   c = 142

Kontrolle mit Maxima

(%o1) $4\,c+3\,b+a=200$

(%i2) `g2:2*a-2*b+8*c=10;`

(%o2) $8\,c-2\,b+2\,a=10$

(%i3) `g3:3*a+b+7*c=-500;`

(%o3) $7\,c+b+3\,a=-500$

(%i4) `solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);`

(%o4) $[\,[\,a=-\frac{2057}{4}\,,\ b=\frac{195}{4}\,,\ c=142\,]\,]$

(%i5) `%,numer;`

(%o5) $[\,[\,a=-514.25\,,\ b=48.75\,,\ c=142\,]\,]$

Aufgabe 3

$$a\cdot\begin{vmatrix}1\\2\\32\end{vmatrix}+b\cdot\begin{vmatrix}30\\-2\\1\end{vmatrix}+c\cdot\begin{vmatrix}4\\8\\77\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}200\\10\\-500\end{vmatrix}$$

Lösung :
a = -56,755218   b = 6,2903226   c = 17,011385

Kontrolle mit Maxima

(%o1) $4\,c+30\,b+a=200$

(%i2) `g2:2*a-2*b+8*c=10;`

(%o2) $8\,c-2\,b+2\,a=10$

(%i3) `g3:32*a+b+77*c=-500;`

(%o3) $77\,c+b+32\,a=-500$

(%i4) `solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);`

(%o4) $[\,[\,a=-\frac{29910}{527}\,,\ b=\frac{195}{31}\,,\ c=\frac{8965}{527}\,]\,]$

(%i5) `%,numer;`

(%o5) $[\,[\,a=-56.75521821631879\,,\ b=6.290322580645161\,,\ c=$
$17.01138519924099\,]\,]$

Aufgabe 4

```
   |  1 |      | 39 |      |  4 |    | 200 |
 a·|  2 | + b·| -2 | + c·|  8 | =  |  10 |
   | 32 |      | 12 |      | 77 |    | -50 |
```

Lösung :
  a = -23,419118   b = 4,875   c = 8,3235294

Kontrolle mit Maxima

(%i1) g1:a+39*b+4*c=200;

(%o1) $4\,c+39\,b+a=200$

(%i2) g2:2*a-2*b+8*c=10;

(%o2) $8\,c-2\,b+2\,a=10$

(%i3) g3:32*a+12*b+77*c=-50;

(%o3) $77\,c+12\,b+32\,a=-50$

(%i4) solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);

(%o4) $\left[\left[a=-\frac{3185}{136},\ b=\frac{39}{8},\ c=\frac{283}{34}\right]\right]$

(%i5) %,numer;

(%o5) $[[a=-23.41911764705882,\ b=4.875,\ c=$
$8.323529411764707]]$

Aufgabe 5

```
   | 45 |      | 39 |      |  4 |    | 200 |
 a·|  2 | + b·|-24 | + c·|  8 | =  | 102 |
   | 32 |      | 12 |      | 17 |    | -50 |
```

Lösung :
  a = 16,945826   b = -11,69836   c = -26,581537

Kontrolle mit Maxima

```
(%i1) g1:45*a+39*b+4*c=200;
```

(%o1) $4\,c + 39\,b + 45\,a = 200$

```
(%i2) g2:2*a-24*b+8*c=102;
```

(%o2) $8\,c - 24\,b + 2\,a = 102$

```
(%i5) g3:32*a+12*b+17*c=-50;
```

(%o5) $17\,c + 12\,b + 32\,a = -50$

```
(%i6) solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);
```

(%o6) $[\,[\,a = \frac{30655}{1809}\,,\; b = -\frac{63487}{5427}\,,\; c = -\frac{48086}{1809}\,]\,]$

```
(%i7) %,numer;
```

(%o7) $[\,[\,a = 16.94582642343836\,,\; b = -11.69836005159388\,,\; c = -26.58153676064124\,]\,]$

(%i1) `g1:-7*x+4*y-9*z=60;`

(%o1) $-9\ z+4\ y-7\ x=60$

(%i2) `g2:-3*x+5*y+9*z=-32;`

(%o2) $9\ z+5\ y-3\ x=-32$

(%i3) `g3:-4*x+8*y+z=15;`

(%o3) $z+8\ y-4\ x=15$

(%i4) `A:coefmatrix([g1,g2,g3],[x,y,z]);`

(%o4) $\begin{bmatrix}-7 & 4 & -9\\ -3 & 5 & 9\\ -4 & 8 & 1\end{bmatrix}$

(%i5) `b:matrix([60], [-32], [15]);`

(%o5) $\begin{bmatrix}60\\ -32\\ 15\end{bmatrix}$

(%i6) `x:invert(A).b;`

(%o6) $\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ -5\end{bmatrix}$

(%i7) `"=============================================="$`

(%i8) `" x = -1 , y = 2 , z = -5                      "$`

(%i9) `"=============================================="$`

(%i11) `kill(x);`

(%o11) *done*

(%i12) `g1:-7*x-2*y-6*z=-36;`

(%o12) $-6\ z-2\ y-7\ x=-36$

(%i13) `g2:-9*x-5*y+z=-85;`

(%o13) $z-5\ y-9\ x=-85$

(%i22) `g3:-7*x-2*y+4*z=-86;`

(%o22) $4\ z-2\ y-7\ x=-86$

(%i23) `A:coefmatrix([g1,g2,g3],[x,y,z]);`

(%o23) $\begin{bmatrix}-7 & -2 & -6\\ -9 & -5 & 1\\ -7 & -2 & 4\end{bmatrix}$

(%i24) `b:matrix([-36], [-85], [-86]);`

(%o24) $\begin{bmatrix} -36 \\ -85 \\ -86 \end{bmatrix}$

(%i25) X:invert(A).b;

(%o25) $\begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$

(%i26) "=="$

(%i27) " x = 10 , y = - 2 , z = - 5   "$

(%i28) "=="$

(%i29)

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Quadratische Funktion bestimmen                     "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) load(vect);
```

der Aufruf des Unterprogramms ist NICHT notwendig (war ein Versehen :-)

```
(%o4)
C:/Programme/Maxima-5.9.1/share/maxima/5.9.1/share/vector/vect.mac
(%i5) x:[10,29,64];
(%o5)  [ 10 , 29 , 64 ]
(%i6) y:3*x-12;
(%o6)  [ 18 , 75 , 180 ]
(%i7) kill(all);
(%o0)  DONE
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) x1:10;
(%o2)  10
(%i3) y1:18;
(%o3)  18
(%i4) x2:29;
(%o4)  29
(%i5) y2:75;
(%o5)  75
(%i6) x3:64;
(%o6)  64
(%i7) y3:180;
(%o7)  180
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) " Das sind die gegebenen Punkte                       "$
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) g(x,y):=y=a*x^2+b*x+c;
```

(%o11) $g\left(x , y\right) := y = a\ x^2 + b\ x + c$

```
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) g1:g(x1,y1);
(%o13)  18 = c + 10 b + 100 a
(%i15) g2:g(x2,y2);
(%o15)  75 = c + 29 b + 841 a
(%i16) g3:g(x3,y3);
(%o16)  180 = c + 64 b + 4096 a
(%i17) "*****************************************************"$
```

```
(%i18) solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);
(%o18)  [ [ a = 0 , b = 3 , c = - 12 ] ]
(%i19) "*****************************************************"$
(%i20) " Die drei Punkte liegen auf einer Geraden           "$
(%i21) "*****************************************************"$
(%i22)
```

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Zweipunktform der Geradengleichung                 "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) Gerade:matrix([1,1,1], [x,x[1],x[2]], [y,y[1],y[2]]);
```

(%o4) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) determinant(Gerade);
```

(%o5) $x_2\,y - x_1\,y - y_2\,x + y_1\,x + x_1\,y_2 - y_1\,x_2$

```
(%i6) solve(%,y);
```

(%o6) $$[\,y = \frac{\left(y_2 - y_1\right)\,x - x_1\,y_2 + y_1\,x_2}{x_2 - x_1}\,]$$

```
(%i7) expand(%);
```

(%o7) $$[\,y = \frac{y_2\,x}{x_2 - x_1} - \frac{y_1\,x}{x_2 - x_1} - \frac{x_1\,y_2}{x_2 - x_1} + \frac{y_1\,x_2}{x_2 - x_1}\,]$$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) g(x,y):=y=k*x+d;
```

(%o9) $g\left(x\,,\,y\right) := y = k\,x + d$

```
(%i10) g1:g(x[1],y[1]);
```

(%o10) $y_1 = x_1\,k + d$

```
(%i11) g2:g(x[2],y[2]);
```

(%o11) $y_2 = x_2\,k + d$

```
(%i12) solve([g1,g2],[k,d]);
```

(%o12) $$[\,[\,k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,,\;d = -\frac{y_1\,x_2 - x_1\,y_2}{x_1 - x_2}\,]\,]$$

```
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14)
```

Schnittpunkt von Ellipse und Gerade

Beispiel 1

Aufgabe

- Freie Objekte
  - a = 5
  - b = 4
  - d = 0
  - k = 1
- Abhängige Objekte
  - A = (3.12, 3.12)
  - B = (-3.12, -3.12)
  - c: $0.04x^2 + 0.06y^2 = 1$
  - e: y = x
- Hilfsobjekte

Lösung

(%i1) a:5;

(%o1) 5

(%i2) b:4;

(%o2) 4

(%i3) k:1;

(%o3) 1

(%i4) d:0;

(%o4) 0

(%i5) g1:x^2/a^2+y^2/b^2=1;

(%o5) $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{25}=1$

(%i6) g2:y=k*x+d;

(%o6) $y=x$

(%i7) solve([g1,g2],[x,y]);

(%o7) $[\,[\,x=-\frac{20}{\sqrt{41}},\ y=-\frac{20}{\sqrt{41}}\,],\ [\,x=\frac{20}{\sqrt{41}},\ y=\frac{20}{\sqrt{41}}\,]\,]$

(%i9) fpprec : 4;

(%o9) 4

(%i10) %o7,numer;

(%o10) $[\,[\,x=-3.123,\ y=-3.123\,],\ [\,x=3.123,\ y=3.123\,]$
$]$

Beispiel 2

Aufgabe

Freie Objekte
- a = 5
- b = 4
- d = 1
- k = 1

Abhängige Objekte
- A = (2.48, 3.48)
- B = (-3.69, -2.69)
- c: $0.04x^2 + 0.06y^2 = 1$
- e: y = x + 1

Hilfsobjekte

Lösung

(%i1) `fpprec : 4;`

(%o1) 4

(%i2) `a:5;`

(%o2) 5

(%i3) `b:4;`

(%o3) 4

(%i4) `k:1;`

(%o4) 1

(%i5) `d:1;`

(%o5) 1

(%i6) `g1:x^2/a^2+y^2/b^2=1;`

(%o6) $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{25}=1$

(%i7) `g2:y=k*x+d;`

(%o7) $y = x + 1$

(%i8) `solve([g1,g2],[x,y]),numer;`

`rat' replaced 0.04 by 1//25 = 0.04

`rat' replaced 0.063 by 1//16 = 0.063

(%o8) $[\,[\,x = -3.695\,,\ y = -2.695\,]\,,\ [\,x = 2.475\,,\ y = 3.475\,]\,]$

Beispiel 3

Aufgabe

Freie Objekte
- $a = 5$
- $b = 4$
- $d = 1$
- $k = -1$

Abhängige Objekte
- $A = (3.69, -2.69)$
- $B = (-2.48, 3.48)$
- $c: 0.04x^2 + 0.06y^2 = 1$
- $e: y = -x + 1$

Hilfsobjekte

Lösung

(%i1) fpprec : 4;

(%o1) 4

(%i2) a:5;

(%o2) 5

(%i3) b:4;

(%o3) 4

(%i4) k:-1;

(%o4) -1

(%i5) d:1;

(%o5) 1

(%i6) g1:x^2/a^2+y^2/b^2=1;

(%o6) $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{25} = 1$

(%i7) g2:y=k*x+d;

(%o7) $y = 1 - x$

(%i10) solve([g1,g2],[x,y]),numer;

`rat' replaced 0.04 by 1//25 = 0.04
`rat' replaced 0.063 by 1//16 = 0.063

(%o10) $[\,[\,x = -2.475\,,\ y = 3.475\,]\,,\ [\,x = 3.695\,,\ y = -2.695\,]\,]$

Beispiel 4

Aufgabe

- Freie Objekte
  - a = 5
  - b = 3
  - d = 1
  - k = -1
- Abhängige Objekte
  - A = (3.27, -2.27)
  - B = (-1.8, 2.8)
  - c: $0.04x^2 + 0.11y^2 = 1$
  - e: y = -x + 1
- Hilfsobjekte

Lösung

```
(%i1)  fpprec : 4;
(%o1)  4
(%i2)  a:5;
(%o2)  5
(%i3)  b:3;
(%o3)  3
(%i4)  k:-1;
(%o4)  - 1
(%i5)  d:1;
(%o5)  1
(%i6)  g1:x^2/a^2+y^2/b^2=1;
```

(%o6) $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{25} = 1$

```
(%i7)  g2:y=k*x+d;
```

(%o7) $y = 1 - x$

```
(%i9)  solve([g1,g2],[x,y]),numer;
`rat' replaced 0.04 by 1//25 = 0.04
`rat' replaced 0.11 by 1//9 = 0.11
```

(%o9) $[\,[\,x = -1.799\,,\ y = 2.799\,]\,,\ [\,x = 3.27\,,\ y = -2.27\,]\,]$

```
(%i10)
```

Beispiel 5

Aufgabe

- Freie Objekte
  - a = 5
  - b = 3
  - d = 2
  - k = -1
- Abhängige Objekte
  - A = (3.89, -1.89)
  - B = (-0.95, 2.95)
  - c: $0.04x^2 + 0.11y^2 = 1$
  - e: y = -x + 2
- Hilfsobjekte

Lösung

(%i1) fpprec : 4;

(%o1) 4

(%i2) a:5;

(%o2) 5

(%i3) b:3;

(%o3) 3

(%i4) k:-2;

(%o4) -2

(%i5) d:1;

(%o5) 1

(%i6) g1:x^2/a^2+y^2/b^2=1;

(%o6) $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{25} = 1$

(%i7) g2:y=k*x+d;

(%o7) $y = 1 - 2x$

(%i8) solve([g1,g2],[x,y]),numer;

`rat' replaced 0.04 by 1//25 = 0.04

`rat' replaced 0.11 by 1//9 = 0.11

(%o8) $[[x = -0.97, y = 2.943], [x = 1.889, y = -2.778]]$

(%i9)

```
(%i1) p:1/n;
```

$$(\%o1)\quad \frac{1}{n}$$

```
(%i2) m:sum(k*p,k,1,n);
```

$$(\%o2)\quad \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n}$$

```
(%i3) m:m,simpsum;
```

$$(\%o3)\quad \frac{n^2 + n}{2\,n}$$

```
(%i4) m:factor(m);
```

$$(\%o4)\quad \frac{n + 1}{2}$$

```
(%i5) "****************************************************"$
(%i6) " Das ist der Erwartungswert (Gleichverteilung)      "$
(%i7) "****************************************************"$
(%i8) v:sum((k-m)^2*p,k,1,n);
```

$$(\%o8)\quad \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{n+1}{2}\right)^2}{n}$$

```
(%i9) v:v,simpsum;
```

$$(\%o9)\quad \frac{\frac{2\,n^3 + 3\,n^2 + n}{6} - \frac{n^3 + n^2}{2} + \frac{n^3}{4} - \frac{n^2 + n}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{4}}{n}$$

```
(%i10) v:factor(v);
```

$$(\%o10)\quad \frac{(n - 1)\,(n + 1)}{12}$$

```
(%i11) "****************************************************"$
(%i12) " Das ist die Varianz (Gleichverteilung)             "$
(%i13) "****************************************************"$
(%i14) s:sqrt(v);
```

$$(\%o14)\quad \frac{\sqrt{(n - 1)\,(n + 1)}}{2\,\sqrt{3}}$$

```
(%i15) "****************************************************"$
(%i16) " Das ist die Streuung (Gleichverteilung)            "$
(%i17) "****************************************************"$
(%i18)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) integrate(x,x,a,b);
```

$$(\%o2)\quad \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Integrationsgrenzen angeben

```
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) integrate(x^2,x,2,4);
```

$$(\%o4)\quad \frac{56}{3}$$

```
(%i5) "*****************************************************"$
(%i6) integrate(sin(x),x,0,%pi/2);
(%o6) 1
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) integrate(abs(x-3),x,2,3);
```

$$(\%o8)\quad \frac{1}{2}$$

```
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Bestimmte Integrale "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) f(x):=x^2;
```

(%o4) $f(x) := x^2$

```
(%i5) integrate(f(x),x,0,1);
```

(%o5) $\frac{1}{3}$

```
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) f(x);
```

(%o7) x^2

```
(%i8) integrate(f(x),x,-1,1);
```

(%o8) $\frac{2}{3}$

```
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) f(x);
```

(%o10) x^2

```
(%i11) integrate(f(x),x,0,3);
```

(%o11) 9

```
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) f(x):=x+1;
```

(%o13) $f(x) := x + 1$

```
(%i15) integrate(f(x),x,0,5);
```

(%o15) $\frac{35}{2}$

```
(%i16) "*****************************************************"$
(%i17) f(x):=x;
```

(%o17) $f(x) := x$

```
(%i18) integrate(f(x),x,0,3);
```

(%o18) $\frac{9}{2}$

```
(%i19) "*****************************************************"$
(%i20)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Unbestimmte Integrale "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) f(x):=exp(k*x);
```

(%o4) $f(x) := \mathrm{EXP}(k\ x)$

(%i5) `integrate(f(x),x);`

(%o5) $\dfrac{\%e^{k\ x}}{k}$

```
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) f(x):=cos(3*x-4);
```

(%o7) $f(x) := \cos(3\ x - 4)$

(%i8) `integrate(f(x),x);`

(%o8) $\dfrac{\sin(3\ x - 4)}{3}$

```
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) f(x):=sqrt(1-4*x);
```

(%o10) $f(x) := \sqrt{1 - 4\ x}$

(%i11) `integrate(f(x),x);`

(%o11) $-\dfrac{(1 - 4\ x)^{3/2}}{6}$

```
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) f(x):=x^4*(1+x^5)^(1/3);
```

(%o13) $f(x) := x^4\ (1 + x^5)^{1/3}$

(%i14) `integrate(f(x),x);`

(%o14) $\dfrac{3\ (x^5 + 1)^{4/3}}{20}$

```
(%i15) "*****************************************************"$
(%i16) f(x):=cos(2*x);
```

(%o16) $f(x) := \cos(2\ x)$

(%i17) `integrate(f(x),x);`

(%o17) $\dfrac{\sin(2\ x)}{2}$

(%i18) "**"$

(%i19) f(x):=(cos(x))^2;

(%o19) $f(x) := \cos(x)^2$

(%i20) integrate(f(x),x);

(%o20) $$\frac{\frac{\sin(2\,x)}{2}+x}{2}$$

(%i21) "**"$

(%i22)

```
(%i1) "******************************************************"$
(%i2) " Integralrechnung - FREIER FALL                       "$
(%i3) "******************************************************"$
(%i4) a(t):=g;
(%o4)  a(t) := g
```

durch zweimalige Integration kann man das Weg-Zeit-Gesetz
des freien Falls bestimmen

```
(%i5) "******************************************************"$
(%i6) " Beschleunigung ist Erdbeschleunigung                 "$
(%i7) "******************************************************"$
(%i8) v(t):=integrate(a(t),t);
(%o8)  v(t) := INTEGRATE(a(t), t)
(%i9) v(t);
(%o9)  g t
(%i10) "******************************************************"$
(%i11) " Die Geschwindigkeit                                  "$
(%i12) "******************************************************"$
(%i13) s(t):=integrate(v(t),t);
(%o13)  s(t) := INTEGRATE(v(t), t)
(%i14) s(t);
```

(%o14) $\frac{g\, t^2}{2}$

```
(%i15) "******************************************************"$
(%i16) " Das Weg-Zeit-Gesetz                                  "$
(%i17) "******************************************************"$
(%i18)
```

wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.

(%i1) "+++"$

(%i2) " Bestimme Integrale "$

(%i3) "+++"$

(%i4) f(x):=x;

(%o4) $f(x) := x$

(%i5) integrate(f(x),x,a,b);

(%o5) $\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

(%i6) "+++"$

(%i7) f(x):=x^2;

(%o7) $f(x) := x^2$

(%i8) integrate(f(x),x,a,b);

(%o8) $\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

(%i9) "+++"$

(%i10) f(x):=x^3;

(%o10) $f(x) := x^3$

(%i11) integrate(f(x),x,a,b);

(%o11) $\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$

(%i12)
"+++"$

(%i13) f(x):=sin(x);

(%o13) $f(x) := \sin(x)$

(%i14) integrate(f(x),x,a,b);

Is b - a positive, negative, or zero? positive;

(%o14) $\cos(a) - \cos(b)$

(%i15)
"+++"$

(%i16) f(x):=abs(x-3);

(%o16) $f(x) := |x - 3|$

(%i17) integrate(f(x),x,a,b);

(%o17) $$\int_{a}^{b} \left(\left|x-3\right|\right) dx$$

(%i18)

```
"++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++"$
```

(%i19) `f(x):=F(x);`

(%o19) $f\left(x\right) := F\left(x\right)$

(%i20) `integrate(F(x),x,a,b);`

(%o20) $$\int_{a}^{b} \left(F\left(x\right)\right) dx$$

(%i21) `%=F(b)-F(a);`

(%o21) $$\int_{a}^{b} \left(F\left(x\right)\right) dx = F\left(b\right) - F\left(a\right)$$

(%i23)

```
"++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++"$
```

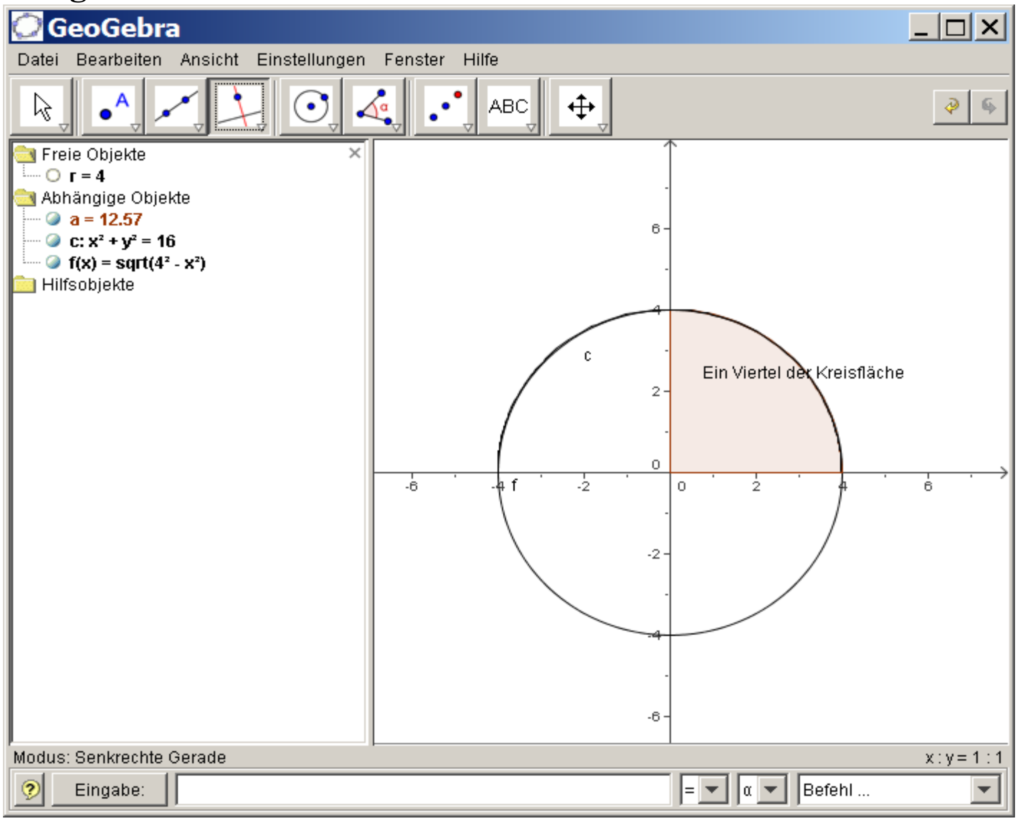
(%i24) `" Das ist der Hauptsatz der Integralrechnung "$`

(%i25)

```
"++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++"$
```

(%i26)

Berechnung der Kreisfläche




```
(%i1)
"****************************************************"$
(%i2)
" Bestimmung der Kreisfläche                          "$
(%i3)
"****************************************************"$
(%i4) f(x):=sqrt(r^2-x^2);
```

(%o4) $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$

```
(%i6) Flaeche_des_Kreises:4*integrate(f(x),x,0,r);
Is  r  positive, negative, or zero? positive;
```

(%o6) $\%pi\ r^2$

```
(%i8) Flaeche_des_Kreises;
```

(%o8) $\%pi\ r^2$

```
(%i9)
```

```
(%i1) "=================================================="$
(%i3) " Fläche von Kreis und Ellipste                   "$
(%i4) "=================================================="$
(%i5) Kreis:x^2+y^2=r^2;
```

(%o5) $y^2 + x^2 = r^2$

```
(%i6) solve(Kreis,y);
```

(%o6) $[\ y = -\sqrt{r^2 - x^2}\ ,\ y = \sqrt{r^2 - x^2}\ ]$

```
(%i7) f(x):=sqrt(r^2-x^2);
```

(%o7) $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$

```
(%i9) Flaeche_Kreis:2*integrate(f(x),x,-r,r);
```

Is r positive or negative? positive;

(%o9) $\%pi\ r^2$

```
(%i10) "=================================================="$
(%i11) Ellipse:x^2/a^2+y^2/b^2=1;
```

(%o11) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$

```
(%i12) solve(Ellipse,y);
```

(%o12) $[\ y = -\frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\ ,\ y = \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\ ]$

```
(%i13) f(x):=b/a*sqrt(a^2-x^2);
```

(%o13) $f(x) := \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

```
(%i14) Flaeche_Ellipse:2*integrate(f(x),x,-a,a);
```

Is a positive or negative? positive;

(%o14) $\%pi\ a\ b$

```
(%i15) "=================================================="$
(%i16)
```

Kontrolliere die folgenden Flächenintegrale

Aufgabe 1

f1 (x) = x^2
f2 (x) = 0

Integrationsintervall [a;b] von 0 bis 3

Orientierter Inhalt: A1 = 9
Absoluter Inhalt : A2 = 9

Lösung mit Maxima

```
(%i1) f(x):=x^2;
(%o1) f(x) := x^2
(%i2) a:0;
(%o2) 0
(%i3) b:3;
(%o3) 3
(%i4) integrate(f(x),x,a,b);
(%o4) 9
```

Aufgabe 2

f1 (x) = x^3
f2 (x) = 0

Integrationsintervall [a;b] von 0 bis 3

Orientierter Inhalt: A1 = 20,25
Absoluter Inhalt : A2 = 20,25

Lösung mit Maxima

```
(%i1) f(x):=x^3;
```

(%o1) $f(x) := x^3$

```
(%i2) a:0;
(%o2) 0
(%i3) b:3;
(%o3) 3
(%i4) integrate(f(x),x,a,b);
```

(%o4) $\frac{81}{4}$

```
(%i5) %,numer;
(%o5) 20.25
```

Aufgabe 3

f1 (x) = x^3+x
f2 (x) = 0

Integrationsintervall [a;b] von 0 bis 3

Orientierter Inhalt: A1 = 24,75
Absoluter Inhalt : A2 = 24,75

Lösung mit Maxima

```
(%i1) f(x):=x^3+x;
```

(%o1) $f(x) := x^3 + x$

```
(%i2) a:0;
(%o2) 0
(%i3) b:3;
(%o3) 3
(%i4) integrate(f(x),x,a,b);
```

(%o4) $\frac{99}{4}$

```
(%i5) %,numer;
(%o5) 24.75
```

Aufgabe 4

f1 (x) = x^3+x
f2 (x) = 0

Integrationsintervall [a;b] von -3 bis 3

Orientierter Inhalt: A1 = 0,000000
Absoluter Inhalt : A2 = 49,5

Lösung mit Maxima

(%i1) f(x):=x^3+x;

(%o1) $f(x) := x^3 + x$

(%i2) a:-3;

(%o2) -3

(%i3) b:3;

(%o3) 3

(%i4) integrate(f(x),x,a,b);

(%o4) 0

(%i6)

flaeche:abs(integrate(f(x),x,a,0))+integrate(f(x),x,0,b);

(%o6) $\frac{99}{2}$

(%i7) %,numer;

(%o7) 49.5

Aufgabe 5

f1 (x) = x^2-8*x+15
f2 (x) = 0

Integrationsintervall [a;b] von 0 bis 8

Orientierter Inhalt: A1 = 34,6667
Absoluter Inhalt : A2 = 37,3333

Lösung mit Maxima

```
(%i1) f(x):=x^2-8*x+15;
```

(%o1) $f(x) := x^2 - 8\,x + 15$

```
(%i2) "===============================================" $
(%i3) " Bestimmung der Nullstellen                    " $
(%i4) "===============================================" $
(%i5) solve(f(x)=0,x);
```

(%o5) $[\, x = 3 \,,\, x = 5 \,]$

```
(%i6) a:0;
(%o6) 0
(%i7) b:8;
(%o7) 8
(%i8) integrate(f(x),x,a,b);
```

(%o8) $\frac{104}{3}$

```
(%i9) %,numer;
(%o9) 34.66666666666666
(%i10) "===============================================" $
(%i11) "Das ist der orientierte Inhalt A1             " $
(%i12) "===============================================" $
```

Berechnung der Fläche

```
(%i13)
flaeche:integrate(f(x),x,a,3)+abs(integrate(f(x),x,3,5))+integrate(f(x),
x,5,b);
```

(%o13) $\frac{112}{3}$

```
(%i14) %,numer;
(%o14) 37.33333333333334
(%i15) "================================================" $
(%i16) " Das ist die Fläche A2                          " $
(%i17) "================================================" $
```

(%i1) "=="$

(%i2) " Volumen von Kreis und Kugel   "$

(%i3) "=="$

(%i4) f(x):=sqrt(r^2-x^2);

(%o4) $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$

(%i5) Volumen_der_Kugel:%pi*integrate(f(x)^2,x,-r,r);

(%o5) $\frac{4\ \%pi\ r^3}{3}$

(%i6) "=="$

(%i7) f(x):=b/a*sqrt(a^2-x^2);

(%o7) $f(x) := \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

(%i8) Volumen_vom_Ellipsoid:%pi*integrate(f(x)^2,x,-a,a);

(%o8) $\frac{4\ \%pi\ a\ b^2}{3}$

(%i9) "=="$

(%i10) " Ellipsoid mit Rotation um die x_Achse   "$

(%i11) "=="$

(%i12) Vy:4*%pi*a^2*b/3;

(%o12) $\frac{4\ \%pi\ a^2\ b}{3}$

(%i13) "=="$

(%i14) " Diese Variante bitte nachrechnen   "$

(%i15) " Rotation um die y-Achse   "$

(%i16) "=="$

(%i17)

```
(%i1) "***************************************************"$
(%i2) " Natürlicher Logarithmus als Integralfunktion      "$
(%i3) "***************************************************"$
(%i4) f(u):=integrate(1/x,x,1,u);
```

(%o4) $f(u) := \mathrm{INTEGRATE}\left(\frac{1}{x}, x, 1, u\right)$

```
(%i5) f(x);
Is  x - 1  positive, negative, or zero? positive;
```

(%o5) $\log(x)$

```
(%i6) "***************************************************"$
(%i7) f(x);
Is  x - 1  positive, negative, or zero? negative;
Is  x  positive, negative, or zero? negative;
Principal Value
```

(%o7) $\log\left(-\frac{1}{x}\right)$

```
(%i9) f(x);
Is  x - 1  positive, negative, or zero? negative;
Is  x  positive, negative, or zero? positive;
```

(%o9) $\log(x)$

```
(%i10) f(x);
Is  x - 1  positive, negative, or zero? negative;
Is  x  positive, negative, or zero? zero;
Principal Value
```

(%o10) $\log\left(-\frac{1}{x}\right)$

```
(%i11) "und weitere Fallunterscheidungen ...                "$
(%i12)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Partialbruchzerlegung                            "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) f(x):=(x^4-2*x^2+2)/(x^2+1);
```

(%o4) $f(x) := \frac{x^4 - 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$

```
(%i5) integrate(f(x),x);
```

(%o5) $5\,\mathrm{atan}(x) + \frac{x^3 - 9x}{3}$

```
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) f(x):=1/(x^2-1);
```

(%o7) $f(x) := \frac{1}{x^2 - 1}$

```
(%i8) integrate(f(x),x);
```

(%o8) $\frac{\log(x-1)}{2} - \frac{\log(x+1)}{2}$

```
(%i9) "**************************************************"$
(%i10) f(x):=1/((x-1)*(x-2)*(x-3));
```

(%o10) $f(x) := \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

```
(%i11) integrate(f(x),x);
```

(%o11) $\frac{\log(x-1)}{2} - \log(x-2) + \frac{\log(x-3)}{2}$

```
(%i12) "**************************************************"$
(%i13) f(x):=(x-4)/((x-1)^2*(x+1));
```

(%o13) $f(x) := \frac{x-4}{(x-1)^2 (x+1)}$

```
(%i14) integrate(f(x),x);
```

(%o14) $-\frac{5\log(x+1)}{4} + \frac{5\log(x-1)}{4} + \frac{3}{2x-2}$

```
(%i15) "**************************************************"$
(%i16) f(x):=(x+2)/((x^2+4)*(x-1));
```

(%o16) $f(x) := \frac{x+2}{(x^2+4)(x-1)}$

```
(%i17) integrate(f(x),x);
```

(%o17) $-\frac{3\log(x^2+4)}{10} + \frac{\mathrm{atan}\left(\frac{x}{2}\right)}{5} + \frac{3\log(x-1)}{5}$

```
(%i18) "**************************************************"$
(%i19)
```

```
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Partielle Integration                              "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) f(x):=x*%e^x;
```

(%o4) $f(x) := x\ \%e^{x}$

```
(%i5) integrate(f(x),x);
```

(%o5) $(x-1)\ \%e^{x}$

```
(%i6) "****************************************************"$
(%i7) f(x):=x^2*%e^x;
```

(%o7) $f(x) := x^{2}\ \%e^{x}$

```
(%i8) integrate(f(x),x);
```

(%o8) $(x^{2}-2\ x+2)\ \%e^{x}$

```
(%i9) "****************************************************"$
(%i10) f(x):=log(x);
```

(%o10) $f(x) := \log(x)$

```
(%i11) integrate(f(x),x);
```

(%o11) $x\ \log(x) - x$

```
(%i12) "****************************************************"$
(%i13) f(x):=%e^x*sin(x);
```

(%o13) $f(x) := \%e^{x}\ \sin(x)$

```
(%i14) integrate(f(x),x);
```

(%o14) $\dfrac{\%e^{x}\ (\sin(x) - \cos(x))}{2}$

```
(%i15) "****************************************************"$
(%i16) f(x):=%e^x*cos(x);
```

(%o16) $f(x) := \%e^{x}\ \cos(x)$

```
(%i17) integrate(f(x),x);
```

(%o17) $\dfrac{\%e^{x}\ (\sin(x) + \cos(x))}{2}$

```
(%i18) "****************************************************"$
(%i19) f(x):=cos(x)*sin(x);
```

(%o19) $f(x) := \cos(x)\ \sin(x)$

```
(%i20) integrate(f(x),x);
```

(%o20) $-\dfrac{\cos(x)^{2}}{2}$

```
(%i21) "****************************************************"$
(%i22) f(x):=(sin(x))^2;
```

(%o22) $f(x) := \sin(x)^2$

(%i23) `integrate(f(x),x);`

(%o23) $$\frac{x - \frac{\sin(2\,x)}{2}}{2}$$

(%i24) `"**************************************************"$`

(%i25) `f(x):=(cos(x))^2;`

(%o25) $f(x) := \cos(x)^2$

(%i26) `integrate(f(x),x);`

(%o26) $$\frac{\frac{\sin(2\,x)}{2} + x}{2}$$

(%i27) `"**************************************************"$`

(%i28) `f(x):=(sin(x))^2+(cos(x))^2;`

(%o28) $f(x) := \sin(x)^2 + \cos(x)^2$

(%i29) `integrate(f(x),x);`

(%o29) $$\frac{\frac{\sin(2\,x)}{2} + x}{2} + \frac{x - \frac{\sin(2\,x)}{2}}{2}$$

(%i32) `trigsimp(%);` Trigonometrischen Ausdruck vereinfachen

(%o32) x

die gegebene Funktion ist f(x)=1

(%i33) `"**************************************************"$`

(%i34)

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " integralbeispiele "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) f(x):=(sin(x))^2;
```

(%o4) $f(x) := \sin(x)^2$

```
(%i5) integrate(f(x),x);
```

(%o5) $\dfrac{x - \frac{\sin(2\,x)}{2}}{2}$

```
(%i6) "****************************************************"$
(%i7) f(x):=(a^2-x^2)^(1/2);
```

(%o7) $f(x) := \left(a^2 - x^2\right)^{1/2}$

```
(%i8) integrate(f(x),x);
```

(%o8) $\dfrac{a^2 \operatorname{asin}\left(\frac{x}{|a|}\right)}{2} + \dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$

```
(%i9) "****************************************************"$
(%i10) f(x):=(a^2-x^2)^(-1/2);
```

(%o10) $f(x) := \left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

```
(%i11) integrate(f(x),x);
```

(%o11) $\operatorname{asin}\left(\frac{x}{|a|}\right)$

```
(%i12) "****************************************************"$
(%i13)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Arithmetische und geometrische Folgen             "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) f(n):=a[n+1]:a[n]+d;
```

arithmetische Folge: der Abstand zweier benachbarter Folgenglieder ist konstant

(%o4) $f(n) := a_{n+1} : a_n + d$

```
(%i5) for n:1 thru 5 do display(f(n),a[n]);
```

$f(1) = d + a_1$ $a_1 = a_1$ $f(2) = 2\,d + a_1$ $a_2 = d + a_1$ $f(3) = 3\,d + a_1$ $a_3 = 2\,d + a_1$ $f(4) = 4\,d + a_1$ $a_4 = 3\,d + a_1$ $f(5) = 5\,d + a_1$ $a_5 = 4\,d + a_1$

(%o5) DONE

```
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) f(n):=b[n+1]:b[n]*q;
```

geometrische Folge: das Verhältnis zweiter benachbarter Folgenglieder ist konstant

(%o7) $f(n) := b_{n+1} : b_n\, q$

```
(%i8) for n:1 thru 5 do display(f(n),b[n]);
```

$f(1) = b_1\, q$ $b_1 = b_1$ $f(2) = b_1\, q^2$ $b_2 = b_1\, q$ $f(3) = b_1\, q^3$ $b_3 = b_1\, q^2$ $f(4) = b_1\, q^4$ $b_4 = b_1\, q^3$ $f(5) = b_1\, q^5$ $b_5 = b_1\, q^4$

(%o8) DONE

```
(%i9) "**************************************************"$
(%i10)
```

(%i1) "**"$

(%i2) " Zerlegung einer quadratischen Funktion "$

(%i3) "**"$

(%i4) f(x):=x^2-8*x+15;

(%o4) $f(x) := x^2 - 8\ x + 15$

(%i5) g(x):=x^2;

(%o5) $g(x) := x^2$

(%i6) h(x):=8*x-15;

(%o6) $h(x) := 8\ x - 15$

(%i7) g:g(x)=h(x);

(%o7) $x^2 = 8\ x - 15$

(%i8) "**"$

(%i9) " Das ist mittels Iterationsverfahren verarbeitbar "$

(%i10) "**"$

(%i11) x[0]:10;

(%o11) 10

(%i12) f(n):=x[n+1]:(8*x[n]-15)/x[n];

(%o12) $f(n) := x_{n+1} : \frac{8\ x_n - 15}{x_n}$ Iterationsverfahren

(%i13) f(0);

(%o13) $\frac{13}{2}$

(%i14) f(0),numer;

(%o14) 6.5

(%i15) f(1);

(%o15) 5.692307692307692 5

(%i16) f(2);

(%o16) 5.364864864864864 9

(%i17) f(3);

(%o17) 5.204030226700251 8

(%i18) f(4);

(%o18) 5.117618586640851 7

(%i19) f(5);

(%o19) 5.06894921025253

(%i20) f(6);

(%o20) 5.04080680673209 7

(%i21) "**"$

(%i22) " Erste Lösung x=5 "$

```
(%i23) "**************************************************"$
(%i24) x[0]:-10;
(%o24)  - 10
(%i25) f(0);
(%o25)  19/2
(%i26) f(0),numer;
(%o26)  9.5
(%i27) f(1);
(%o27)  6.421052631578947
(%i28) f(2);
(%o28)  5.663934426229508
(%i29) f(3);
(%o29)  5.351664254703328
(%i30) f(4);
(%o30)  5.197133585722011
(%i31) f(5);
(%o31)  5.113793641708725
(%i32) f(6);
(%o32)  5.066756883254309
(%i33) f(7);
(%o33)  5.039526398123585
(%i34) "**************************************************"$
(%i35) " Wieder bekommen wir 5                            "$
(%i36) "**************************************************"$
(%i37) x[0]:1;
(%o37)  1
(%i38) f(0);
(%o38)  - 7
(%i39) f(1);
(%o39)  71/7
(%i40) "**************************************************"$
(%i41) x[0]:0;
(%o41)  0
(%i42) f(0);
Division by 0
#0: f(n=0)
 -- an error.  Quitting.  To debug this try DEBUGMODE(TRUE);
```

```
(%i43) x[0]:2;
(%o43) 2
(%i44) f(0);
        1
(%o44) ---
        2
(%i45) f(1);
(%o45) - 22
(%i46) f(2);
       191
(%o46) ---
        22
(%i47) f(2),numer;
(%o47) 8.681818181818181817
(%i48) "*****************************************************"$
(%i49) x[0]:4;
(%o49) 4
(%i50) f(0);
        17
(%o50) --
         4
(%i51) "*****************************************************"$
(%i52) x[0]:3.5;
(%o52) 3.5
(%i53) f(0);
(%o53) 3.7142857142857144
(%i54) f(1);
(%o54) 3.9615384615384617
(%i55) f(2);
(%o55) 4.2135922330097086
(%i56) "*****************************************************"$
(%i57) x[0]:3.1;
(%o57) 3.1000000000000001
(%i58) f(0);
(%o58) 3.1612903225806455
(%i59) f(1);
(%o59) 3.2551020408163271
(%i60) f(2);
(%o60) 3.3918495297805653
(%i61) "*****************************************************"$
(%i62) x[0]:2.8;
```

```
(%o62)  2.7999999999999998
(%i63)  f(0);
(%o63)  2.6428571428571423
(%i64)  f(1);
(%o64)  2.324324324324323 2
(%i65)  f(2);
(%o65)  1.5465116279069737
(%i66)  f(3);
(%o66)  - 1.6992481203007708
(%i67)  f(4);
(%o67)  16.827433628318488
(%i68)  f(5);
(%o68)  7.1085984748882414
(%i69)  "*****************************************************"$
(%i70)  " Es ist offenbar mit diesem Iterationsverfahren     "$
(%i74)  " nicht möglich, die zweite Nullstelle zu             "$
(%i75)  " erreichen                                            "$
(%i76)  "*****************************************************"$
(%i77)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Eindeutige Lösbarkeit Gleichungssystem             "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) g1:x+y+z=3;
(%o4)  z + y + x = 3
(%i5) g2:2*x-3*y+4*z=3;
(%o5)  4 z - 3 y + 2 x = 3
(%i6) g3:8*x-2*y+z=7;
(%o6)  z - 2 y + 8 x = 7
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) A:coefmatrix([g1,g2,g3],[x,y,z]);
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i9) b:matrix([3], [3], [7]);
```

(%o9) $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

```
(%i10) C:invert(A);
```

(%o10) $\begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{3}{55} & \frac{7}{55} \\ \frac{6}{11} & -\frac{7}{55} & -\frac{2}{55} \\ \frac{4}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$

```
(%i11) d:C.b;
```

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

```
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) " Das ist der Lösungsvektor                           "$
(%i14) "*****************************************************"$
```

```
(%i15) determinant(A);
(%o15)  55
(%i16) "**************************************************"$
(%i17) " Wenn die Koeffizientendeterminante von NULL        "$
(%i18) " verschieden ist, ist das Gleichungssystem eindeutig"$
(%i19) " lösbar                                             "$
(%i20) "**************************************************"$
(%i21)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Binomialkoeffizient benutzerdefiniert "$
(%i4) "*****************************************************"$
(%i5) c(n,k):=n!/(k!*(n-k)!);
```

(%o5) $c(n, k) := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

```
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) " Anwendungen: "$
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) c(45,6);
(%o9) 8145060
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) " Möglichkeiten österreichisches Lotto "$
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) c(49,6);
```

Sechs aus 49, deutsches Lotto

```
(%o13) 13983816
(%i14) "*****************************************************"$
(%i15) " Möglichkeiten deutsches Lotto "$
(%i16) "*****************************************************"$
(%i17) c(50,5);
(%o17) 2118760
(%i18) "*****************************************************"$
(%i19) " Das hat was mit dem europäischen Lotto zu tun "$
(%i20) "*****************************************************"$
(%i21)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Identität Binomialkoeffizienten "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) f(n,k):=binomial(n,k)=n!/(k!*(n-k)!);
```

(%o4) $f(n,k) := \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

```
(%i5) n:0;
(%o5)  0
(%i6) makelist(f(n,k),k,0,n);
(%o6)  [ 1 = 1 ]
(%i7) n:1;
(%o7)  1
(%i8) makelist(f(n,k),k,0,n);
(%o8)  [ 1 = 1 , 1 = 1 ]
(%i9) n:2;
(%o9)  2
(%i10) makelist(f(n,k),k,0,n);
(%o10)  [ 1 = 1 , 2 = 2 , 1 = 1 ]
(%i11) n:3;
(%o11)  3
(%i12) makelist(f(n,k),k,0,n);
(%o12)  [ 1 = 1 , 3 = 3 , 3 = 3 , 1 = 1 ]
(%i13) n:4;
(%o13)  4
(%i14) makelist(f(n,k),k,0,n);
(%o14)  [ 1 = 1 , 4 = 4 , 6 = 6 , 4 = 4 , 1 = 1 ]
(%i15) n:5;
(%o15)  5
(%i16) makelist(f(n,k),k,0,n);
(%o16)  [ 1 = 1 , 5 = 5 , 10 = 10 , 10 = 10 , 5 = 5 , 1 = 1 ]
(%i17) n:6;
(%o17)  6
(%i18) makelist(f(n,k),k,0,n);
```

```
(%o18)  [ 1 = 1 , 6 = 6 , 15 = 15 , 20 = 20 , 15 = 15 , 6 = 6 , 1 = 1 ]
(%i19) n:7;
(%o19)  7
(%i20) makelist(f(n,k),k,0,n);
(%o20)  [ 1 = 1 , 7 = 7 , 21 = 21 , 35 = 35 , 35 = 35 , 21 = 21 , 7 = 7 , 1 = 1 ]
(%i21)
```

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Zeilensummen Pascal-Dreieck                         "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i6) c(n,k):=n!/(k!*(n-k)!);
```

(%o6) $c(n,k) := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

```
(%i7) f(n):=sum(c(n,i),i,0,n);
```

(%o7) $f(n) := \mathrm{SUM}(c(n,i), i, 0, n)$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) f(1);
(%o9) 2
(%i10) f(2);
(%o10) 4
(%i11) f(3);
(%o11) 8
(%i12) f(4);
(%o12) 16
(%i13) f(5);
(%o13) 32
(%i14) f(6);
(%o14) 64
(%i15)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Mächtigkeit Potenzmenge                          "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) sum(binomial(n,k),k,0,n);
```

(%o4) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

```
(%i5) %,simpsum;
```

(%o5) 2^n

```
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) " Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen     "$
(%i8) " einer gegebenen Menge. Unter Mächtigkeit           "$
(%i9) " versteht man die Anzahl ihrer Elemente             "$
(%i10) "**************************************************"$
(%i11)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Zeilensummen im Pascalschen Dreieck "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) sum(binom(n,k),k,0,n);
```

(%o4) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

```
(%i5) %,simpsum;
```

(%o5) 2^n

```
(%i6) "****************************************************"$
(%i7) sum(binomial(n,k),k,0,n);
```

(%o7) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

```
(%i8) %,simpsum;
```

(%o8) 2^n

```
(%i9) "****************************************************"$
(%i10) c(n,k):=n!/(k!*(n-k)!);
```

(%o10) $c(n, k) := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

```
(%i11) sum(c(n,k),k,0,n);
```

(%o11) $\sum_{k=0}^{n} c(n, k)$

```
(%i12) %,simpsum;
```

(%o12) $\sum_{k=0}^{n} c(n, k)$

```
(%i13) "****************************************************"$
(%i14) " Diese Summe kann NICHT ausgewertet werden "$
```

```
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Betriebsoptimum als Lösung der Gleichung           "$
(%i3) " Grenzkosten = Durchschnittskosten                  "$
(%i4) "****************************************************"$
(%i5) K(x):=x^2+8*x+36;
```

(%o5) $K(x) := x^2 + 8\ x + 36$

```
(%i7) DK(x):=K(x)/x;
```

(%o7) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

```
(%i9) GK(x):=diff(K(x),x);
```

(%o9) $GK(x) := DIFF(K(x), x)$

```
(%i10) solve(GK(x)=DK(x),x);
```

(%o10) $[x = - 6 , x = 6]$

```
(%i11) "****************************************************"$
(%i12) " Das Betriebsoptimum ist 6                          "$
(%i13) "****************************************************"$
(%i14) K(x):=x^2+2*x+64;
```

(%o14) $K(x) := x^2 + 2\ x + 64$

```
(%i15) GK(x):=diff(K(x),x);
```

(%o15) $GK(x) := DIFF(K(x), x)$

```
(%i16) DK(x):=K(x)/x;
```

(%o16) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

```
(%i17) solve(GK(x)=DK(x),x);
```

(%o17) $[x = - 8 , x = 8]$

```
(%i18) "****************************************************"$
(%i19) " Das Betriebsoptimum ist 8                          "$
(%i20) "****************************************************"$
(%i23) kill(all);
```

(%o0) DONE

```
(%i1) DK(x):=K(x)/x;
```

(%o1) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

```
(%i2) ab:diff(DK(x),x);
```

(%o2) $\frac{\frac{d}{d\ x} K(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}$

```
(%i3) solve(ab=0,x);
```

(%o3) $$\left[x = \frac{K(x)}{\frac{d}{d\,x} K(x)} \right]$$

(%i4) g:%;

(%o4) $$\left[x = \frac{K(x)}{\frac{d}{d\,x} K(x)} \right]$$

(%i5) g:g/K(x);

(%o5) $$\left[\frac{x}{K(x)} = \frac{1}{\frac{d}{d\,x} K(x)} \right]$$

(%i6) g:1/g;

(%o6) $$\left[\frac{K(x)}{x} = \frac{d}{d\,x} K(x) \right]$$

```
(%i7) "====================================================="$
(%i8) " Durchschnittskosten = Grenzkosten                    "$
(%i9) "====================================================="$
(%i10)
```

```
(%i1) "######################################################"$
(%i2) "# Grenzkosten gegeben                               #"$
(%i3) "######################################################"$
(%i4) F:10000;
(%o4) 10000
(%i5) GK(x):=2*x+8;
(%o5) GK(x) := 2 x + 8
(%i6) KV:integrate(GK(x),x);
(%o6) x^2 + 8 x
(%i7) K(x):=KV+F;
(%o7) K(x) := KV + F
(%i8) K(x);
(%o8) x^2 + 8 x + 10000
(%i9) "######################################################"$
(%i10) F:20000;
(%o10) 20000
(%i11) KV:1.2*x+8;
(%o11) 1.2 x + 8
(%i12) KV:integrate(GK(x),x);
(%o12) x^2 + 8 x
(%i13) K(x):=KV+F;
(%o13) K(x) := KV + F
(%i14) K(x);
(%o14) x^2 + 8 x + 20000
(%i15) "######################################################"$
(%i16) F:55000;
(%o16) 55000
(%i17) GK(x):=0.2*x^2-1.2*x+15;
(%o17) GK(x) := 0.20000000000000001 x^2 - 1.2 x + 15
(%i18) KV:integrate(GK(x),x);
(%o18) 0.066666666666666666 x^3 - 0.59999999999999998 x^2 + 15 x
(%i19) K(x):=KV+F;
(%o19) K(x) := KV + F
(%i20) K(x);
(%o20) 0.066666666666666666 x^3 - 0.59999999999999998 x^2 + 15 x + 55000
(%i21) "######################################################"$
(%i22)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Grenzkosten gegeben - Betriebsoptimum gesucht     "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) F:10000;
(%o4)  10000
(%i5) GK(x):=2*x+8;
(%o5)  GK(x) := 2 x + 8
(%i6) KV:integrate(GK(x),x);
```

(%o6) $x^2 + 8\,x$

```
(%i7) K(x):=KV+F;
(%o7)  K(x) := KV + F
(%i8) K(x);
```

(%o8) $x^2 + 8\,x + 10000$

```
(%i9) "**************************************************"$
(%i10) " Das sind die Gesamtkosten                        "$
(%i11) "**************************************************"$
(%i12) DK(x):=K(x)/x;
```

(%o12) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

```
(%i13) ab:diff(DK(x),x);
```

(%o13) $\frac{2\,x + 8}{x} - \frac{x^2 + 8\,x + 10000}{x^2}$

```
(%i14) solve(ab=0,x);
(%o14)  [ x = - 100 , x = 100 ]
(%i15) "**************************************************"$
(%i16) " Das Betriebsoptimum ist 100                      "$
(%i18) "**************************************************"$
(%i20)
```

(%i1) "==="$

(%i2) " Variable Kosten   "$

(%i3) "==="$

(%i4) Kv(x):=0.1*x^3-1.2*x^2+4.9*x;

(%o4) $Kv(x) := 0.1\ x^3 - 1.2\ x^2 + 4.9\ x$

(%i5) F:4000;

(%o5) 4000

(%i6) K(x):=Kv(x)+F;

(%o6) $K(x) := Kv(x) + F$

(%i7) K(x);

(%o7) $0.1\ x^3 - 1.2\ x^2 + 4.9\ x + 4000$

(%i8) "==="$

(%i9) ab:diff(Kv(x),x);

(%o9) $0.3\ x^2 - 2.4\ x + 4.9$

(%i10) solve(ab=0,x);

`rat' replaced 4.9 by 49//10 = 4.9
`rat' replaced -2.4 by -12//5 = -2.4
`rat' replaced 0.3 by 3//10 = 0.3

(%o10) $[\ x = -\frac{\sqrt{3}\ \%i - 12}{3}\ ,\ x = \frac{\sqrt{3}\ \%i + 12}{3}\ ]$

(%i11) "==="$

(%i12) " es kann nur Randextremwerte geben   "$

(%i13) "==="$

(%i14) ab2:diff(ab,x);

(%o14) $0.6\ x - 2.4$

(%i15) solve(ab2=0,x);

`rat' replaced -2.4 by -12//5 = -2.4
`rat' replaced 0.6 by 3//5 = 0.6

(%o15) $[\ x = 4\ ]$

(%i16) Kv(4);

(%o16) 6.800000000000003

(%i17) "==="$

(%i18) " Der Wendepunkt hat die Koordinaten W(4|6,8)   "$

(%i19) "==="$

(%i20)

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Nachfrage ist Funktion des Preises                 "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) x(p):=16-p^2;
```

(%o4) $x(p) := 16 - p^2$

```
(%i5) U(p):=p*x(p);
```

(%o5) $U(p) := p\ x(p)$

```
(%i6) ab:diff(U(p),p);
```

(%o6) $16 - 3\ p^2$

```
(%i7) solve(ab=0,p);
```

(%o7) $[\, p = -\frac{4}{\sqrt{3}}, p = \frac{4}{\sqrt{3}}\,]$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) " Der positive Wert ist der umsatzmaximale Preis     "$
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) diff(U(p),p,2);
```

(%o11) $- 6\ p$

```
(%i12) %,p=4/sqrt(3);
```

(%o12) $-\frac{24}{\sqrt{3}}$

```
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14) " Wenn die zweite Ableitung negativ ist, liegt ein   "$
(%i15) " Maximum vor                                        "$
(%i16) "*****************************************************"$
(%i17) U(4/sqrt(3));
```

(%o17) $\frac{128}{3\ \sqrt{3}}$

```
(%i18) "*****************************************************"$
(%i19) " Das ist der maximale Umsatz                        "$
(%i20) "*****************************************************"$
(%i21) x(4/sqrt(3));
```

(%o21) $\frac{32}{3}$

```
(%i22) "*****************************************************"$
(%i23) " Das ist die optimale Nachfrage                     "$
(%i24) "*****************************************************"$
(%i25)
```

(%i1) `g:1/2*(36-x[n]^2)=2*(x[n]+1);`

Nachfrage Angebot

(%o1) $\frac{36 - x_n^2}{2} = 2\left(x_n + 1\right)$

(%i2) `solve(g,x[n]);`

(%o2) $[\, x_n = -8 \,,\, x_n = 4 \,]$

(%i3) `g:1/2*(36-x[n]^2)=2*(x[n-1]+1);`

(%o3) $\frac{36 - x_n^2}{2} = 2\left(x_{n-1} + 1\right)$

(%i4) `solve(g,x[n]);`

(%o4) $[\, x_n = -2\sqrt{8 - x_{n-1}} \,,\, x_n = 2\sqrt{8 - x_{n-1}} \,]$

(%i5) `f(n):=x[n]:2*sqrt(8-x[n-1]);`

(%o5) $f\left(n\right) := x_n : 2\sqrt{8 - x_{n-1}}$

(%i6) `x[0]:5.5;`

(%o6) 5.5

(%i7) `f(1);`

(%o7) 3.16227766016838

(%i8) `f(2);`

(%o8) 4.398964578094086

(%i9) `f(3);`

(%o9) 3.795278868228744

(%i10) `f(4);`

(%o10) 4.101083335788853

(%i11) `f(5);`

(%o11) 3.949134925125323

(%i13) `f(6);`

(%o13) 4.025352195708931

(%i14) `f(7);`

(%o14) 3.987303752808943

(%i15) `f(8);`

(%o15) 4.006343094239961

(%i16) `f(9);`

(%o16) 3.996827194543211

(%i17) `f(10);`

(%o17) 4.001586088268895

(%i18) `f(11);`

(%o18) 3.999206877235088

(%i19) `f(12);`

(%o19) 4.000396541726789

```
(%i20) f(13);
(%o20) 3.999801724222445
(%i21) f(14);
(%o21) 4.000099136660268
(%i22)
```

(%i1) n(x):=23-1/8*x^2;

(%o1) $n(x) := 23 - \frac{1}{8}\, x^2$

das ist eine (quadratische) Nachfragefunktion

(%i3) a(x):=01/2*sqrt(x)+20;

(%o3) $a(x) := \frac{1}{2}\sqrt{x} + 20$

die Angebotsfunktion ist grundsätzlich steigend

(%i13) g:23-1/8*x[n]^2=1/2*sqrt(x[n-1])+20;

(%o13) $23 - \frac{{x_n}^2}{8} = \frac{\sqrt{x_{n-1}}}{2} + 20$

(%i14) solve(g,x[n]);

(%o14) $[\, x_n = -2\sqrt{6 - \sqrt{x_{n-1}}},\ x_n = 2\sqrt{6 - \sqrt{x_{n-1}}}\,]$

das ist das Iterations-
verfahren

(%i16) f(n):=x[n]:2*sqrt(6-sqrt(x[n-1]));

(%o16) $f(n) := x_n : 2\sqrt{6 - \sqrt{x_{n-1}}}$

(%i17) x[0]:4.5;

(%o17) 4.5

es ist wichtig, einen passenden Startwert zu finden (dafür sollte man sich Kriterien aus-denken)

(%i18) f(1);

(%o18) 3.938872760798631

(%i19) f(2);

(%o19) 4.007662981657586

(%i20) f(3);

(%o20) 3.999042471006233

(%i21) f(4);

(%o21) 4.000119696497155

(%i22) f(5);

(%o22) 3.999985038021803

(%i23) f(6);

(%o23) 4.000001870248586

3 Dezimalstellen

das Marktgleichgewicht ist 4

(%i24)

(%i1) `a(x):=1/2*x^2+x+21/2;`

(%o1) $a(x) := \frac{1}{2}\, x^2 + x + \frac{21}{2}$

(%i2) `n(x):=-2*x+24;`

(%o2) $n(x) := (-2)\, x + 24$

(%i3) `g:1/2*x[n]^2+x[n]+21/2=-2*x[n-1]+24;`

(%o3) $\frac{{x_n}^2}{2} + x_n + \frac{21}{2} = 24 - 2\, x_{n-1}$

(%i4) `solve(g,x[n]);`

(%o4) $[\, x_n = -2\sqrt{7 - x_{n-1}} - 1 \,,\; x_n = 2\sqrt{7 - x_{n-1}} - 1 \,]$

(%i5) `f(n):=x[n]:2*sqrt(7-x[n-1])-1;`

(%o5) $f(n) := x_n : 2\sqrt{7 - x_{n-1}} - 1$

(%i6) `x[0]:2;`

(%o6) 2

(%i7) `f(1);`

(%o7) $2\sqrt{5} - 1$

(%i8) `f(1),numer;`

(%o8) 3.47213595499958

(%i9) `f(2);`

(%o9) 2.756521819449699

(%i10) `f(3);`

(%o10) 3.119940863920403

(%i11) `f(4);`

(%o11) 2.93957314239987

(%i12) `f(5);`

(%o12) 3.030100176223976

(%i13) `f(6);`

(%o13) 2.984921491711486

(%i14) `f(7);`

(%o14) 3.007532162460341

(%i15) `f(8);`

(%o15) 2.996232144177642

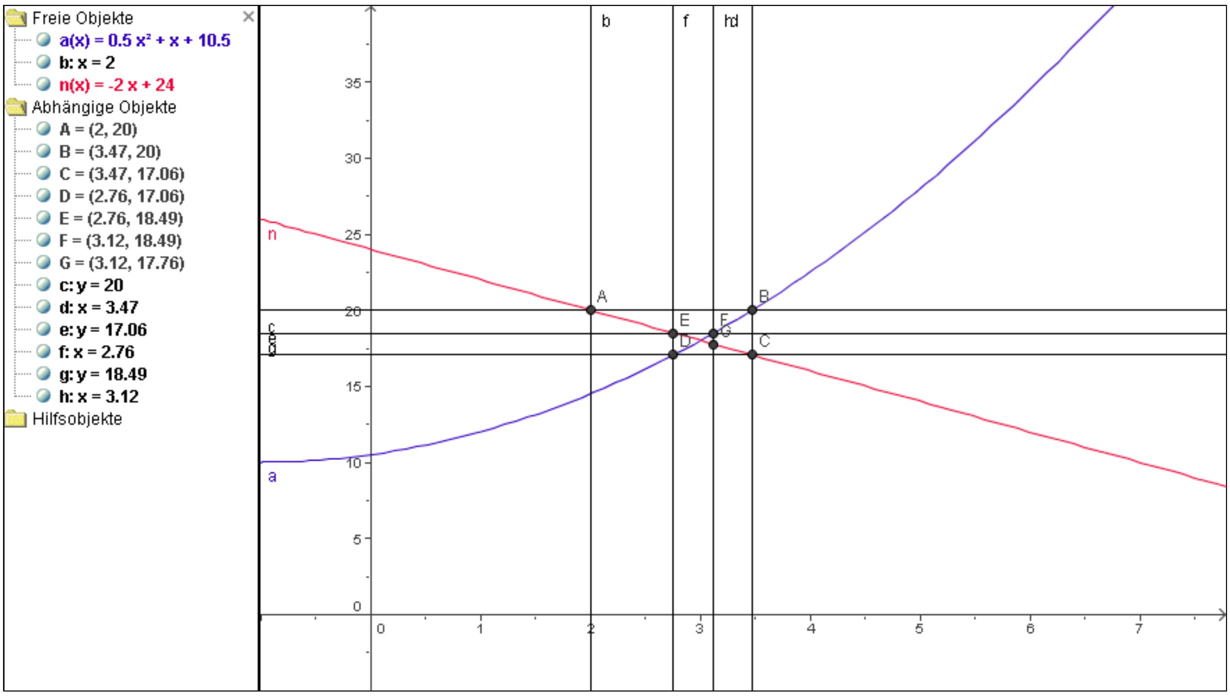
(%i16) `f(9);`

(%o16) 3.00188348447196

(%i17)

Marktgleichgewicht

Johann Weilharter - 2006_05_06



Nr.	Name	Definition	Algebra
1	Funktion a		a(x) = 0.5 x² + x + 10.5
2	Funktion n		n(x) = -2 x + 24
3	Gerade b		b: x = 2
4	Punkt A	Schnittpunkt von n, b	A = (2, 20)
5	Gerade c	Gerade durch A parallel zu xAchse	c: y = 20
6	Punkt B	Schnittpunkt von a, c	B = (3.47, 20)
7	Gerade d	Gerade durch B parallel zu yAchse	d: x = 3.47
8	Punkt C	Schnittpunkt von n, d	C = (3.47, 17.06)
9	Gerade e	Gerade durch C parallel zu xAchse	e: y = 17.06
10	Punkt D	Schnittpunkt von a, e	D = (2.76, 17.06)
11	Gerade f	Gerade durch D parallel zu d	f: x = 2.76
12	Punkt E	Schnittpunkt von n, f	E = (2.76, 18.49)
13	Gerade g	Gerade durch E parallel zu e	g: y = 18.49
14	Punkt F	Schnittpunkt von a, g	F = (3.12, 18.49)
15	Gerade h	Gerade durch F parallel zu yAchse	h: x = 3.12
16	Punkt G	Schnittpunkt von n, h	G = (3.12, 17.76)

Erstellt mit GeoGebra

Zwei Aufgaben zur Umsatzmaximierung

Beispiel 1

Aufgabe

1. Die Nachfrage für eine Ware wird durch eine Funktion mit der Gleichung

$$y_N(x) = -\frac{1}{4}x + 8 \text{ mit } 4 \leqslant x \leqslant 12$$

gegeben.

Lösung

```
(%i1) p(x):=-1/4*x+8;
```
(%o1) $p(x) := \frac{-1}{4}x + 8$
```
(%i2) U(x):=p(x)*x;
```
(%o2) $U(x) := p(x)\,x$
```
(%i3) ab:diff(U(x),x);
```
(%o3) $8 - \frac{x}{2}$
```
(%i4) solve(ab=0,x);
```
(%o4) $[\ x = 16\ ]$
```
(%i5) "================================================"$
(%i6) " Die umsatzmaximale Menge ist nicht definiert   "$
(%i7) "================================================"$
(%i8) p(16);
(%o8) 4
(%i9) "================================================"$
(%i10) " Der umsatzmaximale Preis                       "$
(%i11) "================================================"$
(%i12) U(16);
(%o12) 64
(%i13) "================================================"$
(%i14) " Der maximale Umsatz                           "$
(%i15) "================================================"$
```

Diskutiere die Frage, ob die Einschränkung der Definitionsmenge sinnvoll ist!

Beispiel 2

Aufgabe

2. Die Nachfragefunktion für Hobelmaschinen wird durch die Funktionsgleichung

$$y_N(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 17$$

bestimmt, wobei der Definitionsbereich durch das Intervall $4 \leqslant x \leqslant 8$ festgelegt und der Preis in 10^3 DM je Stück angegeben wird.

Lösung

```
(%i1)  p(x):=-1/4*x^2+17;
```

(%o1) $p(x) := \frac{-1}{4} x^2 + 17$

```
(%i2)  U(x):=p(x)*x;
```

(%o2) $U(x) := p(x)\, x$

```
(%i3)  ab:diff(U(x),x);
```

(%o3) $17 - \frac{3\,x^2}{4}$

```
(%i4)  solve(ab=0,x);
```

(%o4) $[\, x = -\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{3}} \, , \; x = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{3}} \,]$

```
(%i5)  %,numer;
```

(%o5) $[\, x = -\,4.760952285695234 \, , \; x = 4.760952285695234 \,]$

```
(%i6)  "================================================"$
(%i7)  " Die umsatzmaximale Menge ist 4,8               "$
(%i8)  "================================================"$
(%i9)  p(4.8);
(%o9)  11.24
(%i10) "================================================"$
(%i11) " Das ist der umsatzmaximale Preis               "$
(%i12) "================================================"$
(%i13) U(4.8);
(%o13) 53.952
(%i14) "================================================"$
(%i15) " Das ist der maximale Umsatz                    "$
(%i16) "================================================"$
```

(%i1) `F:2;`

(%o1) 2

(%i2) `Kv(x):=0.04*x^3-0.6*x^2+3*x;`

(%o2) $Kv(x) := 0.04\, x^3 - 0.6\, x^2 + 3\, x$

(%i3) `p(x):=-0.16*x+2.8;`

(%o3) $p(x) := (-0.16)\, x + 2.8$

(%i4) `"=================================================="$`

(%i5) `K(x):=Kv(x)+F;`

(%o5) $K(x) := Kv(x) + F$

(%i6) `K(x);`

(%o6) $0.04\, x^3 - 0.6\, x^2 + 3\, x + 2$

(%i7) `"=================================================="$`

(%i8) `" Das sind die Gesamtkosten                        "$`

(%i9) `"=================================================="$`

(%i10) `U(x):=p(x)*x;`

(%o10) $U(x) := p(x)\, x$

(%i11) `U(x);`

(%o11) $(2.8 - 0.16\, x)\, x$

(%i12) `expand(%);`

(%o12) $2.8\, x - 0.16\, x^2$

(%i13) `"=================================================="$`

(%i14) `" Das ist der gesamte Umsatz                       "$`

(%i15) `"=================================================="$`

(%i16) `G(x):=U(x)-K(x);`

(%o16) $G(x) := U(x) - K(x)$

(%i17) `G(x);`

(%o17) $-0.04\, x^3 + 0.6\, x^2 + (2.8 - 0.16\, x)\, x - 3\, x - 2$

(%i18) `expand(%);`

(%o18) $-0.04\, x^3 + 0.44\, x^2 - 0.2\, x - 2$

(%i19) `"=================================================="$`

(%i20) `" Das ist der Gesamtgewinn                         "$`

(%i21) `"=================================================="$`

(%i22) `ab:diff(G(x),x);`

(%o22) $-0.12\, x^2 + 0.88\, x - 0.2$

(%i23) `solve(ab=0,x);`

```
`rat' replaced -0.2 by -1//5 = -0.2
`rat' replaced 0.88 by 22//25 = 0.88
```

```
`rat' replaced -0.12 by -3//25 = -0.12
```

(%o23) $[x = -\frac{\sqrt{106}-11}{3}, x = \frac{\sqrt{106}+11}{3}]$

```
(%i24) %,numer;
(%o24) [ x = 0.23478995300433 , x = 7.098543380329 ]
(%i25) "================================================"$
(%i26) " Eine Kontrolle der 2. Ableitung                "$
(%i27) "================================================"$
(%i28) ab2:diff(ab,x);
(%o28) 0.88 - 0.24 x
(%i29) ab2,x=0.23;
(%o29) 0.8248
(%i30) ab2,x=7.1;
(%o30) - 0.824
(%i31) "================================================"$
(%i32) " Für x=7.1 liegt ein Maximum vor                "$
(%i33) "================================================"$
(%i34) G(7.1);
(%o34) 4.443959999999999
(%i35) "================================================"$
(%i36) " Der maximale Gewinn ist 4.4                    "$
(%i37) "================================================"$
(%i38)
```

(%i1) F:2;

(%o1) 2

(%i2) Kv(x):=1/16*x^3-3/2*x^2+13*x;

(%o2) $Kv(x) := \frac{1}{16} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 13\ x$

(%i3) p(x):=-1/6*x+8;

(%o3) $p(x) := \frac{-1}{6} x + 8$

(%i4) "==="$

(%i5) K(x):=Kv(x)+F;

(%o5) $K(x) := Kv(x) + F$

(%i6) K(x);

(%o6) $\frac{x^3}{16} - \frac{3\ x^2}{2} + 13\ x + 2$

(%i7) "==="$

(%i8) DK(x):=K(x)/x;

(%o8) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

(%i9) DK(x);

(%o9) $\frac{\frac{x^3}{16} - \frac{3\ x^2}{2} + 13\ x + 2}{x}$

(%i10) "==="$

(%i11) GK:diff(K(x),x);

(%o11) $\frac{3\ x^2}{16} - 3\ x + 13$

(%i12) "==="$

(%i13) U(x):=p(x)*x;

(%o13) $U(x) := p(x)\ x$

(%i14) U(x);

(%o14) $\left(8 - \frac{x}{6}\right) x$

(%i15) expand(%);

(%o15) $8\ x - \frac{x^2}{6}$

(%i16) "==="$

(%i17) GU:diff(U(x),x);

(%o17) $8 - \frac{x}{3}$

(%i18) "==="$

(%i19) G(x):=U(x)-K(x);

(%o19) $G(x) := U(x) - K(x)$

(%i20) G(x);

(%o20) $-\frac{x^3}{16}+\frac{3\ x^2}{2}+\left(8-\frac{x}{6}\right)\ x-13\ x-2$

(%i21) expand(%);

(%o21) $-\frac{x^3}{16}+\frac{4\ x^2}{3}-5\ x-2$

(%i22) "=="$

(%i24) allroots(G(x));

(%o24) [$x = -0.36405410358451$, $x = 5.390201942935477$, $x =$ 16.30718549398237]

(%i25) "=="$

(%i26) " 5,4 ist die Nutzenschwelle "$

(%i27) " 16,3 ist die Nutzengrenze "$

(%i28) "=="$

(%i29) ab:diff(G(x),x);

(%o29) $-\frac{3\ x^2}{16}+\frac{8\ x}{3}-5$

(%i31) solve(ab=0,x);

(%o31) [$x = \frac{20}{9}$, $x = 12$]

(%i32) "=="$

(%i33) " Kontrolle der zweiten Ableitung "$

(%i34) "=="$

(%i35) ab2:diff(ab,x);

(%o35) $\frac{8}{3}-\frac{3\ x}{8}$

(%i38) ab2,x=20/9;

(%o38) $\frac{11}{6}$

(%i39) ab2,x=12;

(%o39) $-\frac{11}{6}$

(%i40) "=="$

(%i41) " Die Cournotsche Menge ist 12 "$

(%i42) "=="$

(%i43) G(12);

(%o43) 22

```
(%i44)  "==============================================="$
(%i45)  " Der maximale Gewinn ist 22                    "$
(%i46)  "==============================================="$
(%i47)  p(12);
(%o47)  6
(%i48)  "==============================================="$
(%i49)  " Der Cournotsche Preis ist 12                  "$
(%i50)  "==============================================="$
(%i51)
```

(%i1) F:3;

(%o1) 3

(%i2) p(x):=-1/5*x+3;

(%o2) $p(x) := \frac{-1}{5} x + 3$

(%i3) GK(x):=1/5*(x-4)^2;

(%o3) $GK(x) := \frac{1}{5} (x - 4)^2$

(%i4) "=="$

(%i5) Kv:integrate(GK(x),x);

(%o5) $\frac{\frac{x^3}{3} - 4 x^2 + 16 x}{5}$

(%i6) expand(%);

(%o6) $\frac{x^3}{15} - \frac{4 x^2}{5} + \frac{16 x}{5}$

(%i9) Kv(x):=x^3/15-4*x^2/5+16*x/5;

(%o9) $Kv(x) := \frac{x^3}{15} - \frac{4 x^2}{5} + \frac{16 x}{5}$

(%i10) "=="$

(%i11) K(x):=Kv(x)+F;

(%o11) $K(x) := Kv(x) + F$

(%i12) K(x);

(%o12) $\frac{x^3}{15} - \frac{4 x^2}{5} + \frac{16 x}{5} + 3$

(%i13) "=="$

(%i14) DK(x):=K(x)/x;

(%o14) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

(%i16) DK(x);

(%o16) $\frac{\frac{x^3}{15} - \frac{4 x^2}{5} + \frac{16 x}{5} + 3}{x}$

(%i17) expand(%);

(%o17) $\frac{x^2}{15} - \frac{4 x}{5} + \frac{3}{x} + \frac{16}{5}$

(%i18) "=="$

(%i19) U(x):=p(x)*x;

(%o19) $U(x) := p(x) x$

(%i20) U(x);

(%o20) $\left(3-\frac{x}{5}\right)\,x$

(%i21) expand(%);

(%o21) $3\,x-\frac{x^2}{5}$

(%i22) "=="$

(%i23) " Das ist der Gesamterlös   "$

(%i24) "=="$

(%i25) GU:diff(U(x),x);

(%o25) $3-\frac{2\,x}{5}$

(%i26) "=="$

(%i27) " Das ist der Grenzerlös   "$

(%i28) "=="$

(%i29) G(x):=U(x)-K(x);

(%o29) $G(x):=U(x)-K(x)$

(%i30) G(x);

(%o30) $-\frac{x^3}{15}+\frac{4\,x^2}{5}+\left(3-\frac{x}{5}\right)\,x-\frac{16\,x}{5}-3$

(%i33) expand(G(x));

(%o33) $-\frac{x^3}{15}+\frac{3\,x^2}{5}-\frac{x}{5}-3$

(%i34) "=="$

(%i35) " Das ist der Gesamtgewinn   "$

(%i36) "=="$

(%i37) allroots(G(x));

(%o37) $[\,x=-1.898979485566356\,,\;x=2.999999999999999\,,\;x=$
$7.898979485566356\,]$

(%i38) "=="$

(%i40) " Nutzengrenze = 7.9   "$

(%i41) " Nutzenschwelle = 3   "$

(%i42) "=="$

(%i43) ab:diff(G(x),x);

(%o43) $-\frac{x^2}{5}+\frac{6\,x}{5}-\frac{1}{5}$

(%i44) solve(ab=0);

(%o44) $[\,x=3-2\,\sqrt{2}\,,\;x=2\,\sqrt{2}+3\,]$

(%i45) %,numer;

```
(%o45)  [ x = 0.17157287525381 , x = 5.82842712474619 ]
(%i46)  "================================================"$
(%i47)  " Kontrolle der zweiten Ableitung                "$
(%i48)  "================================================"$
(%i49)  ab2:diff(ab,x);
```

(%o49) $\frac{6}{5} - \frac{2\,x}{5}$

```
(%i50)  ab2,x=0.17;
(%o50)  1.132
(%i51)  ab2,x=5.83;
(%o51)  - 1.132
(%i52)  "================================================"$
(%i55)  " Der maximale Gewinn wird für 5,83 erzielt      "$
(%i56)  "================================================"$
(%i57)  p(5.83);
(%o57)  1.834
(%i58)  "================================================"$
(%i59)  " Das ist der gewinnmaximale Preis               "$
(%i60)  "================================================"$
(%i61)  G(5.83);
(%o61)  3.016987533333333
(%i62)  "================================================"$
(%i63)  " Der maximale Gewinn ist 3                      "$
(%i64)  "================================================"$
(%i65)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i3) " Kurvendiskussion                                     "$
(%i4) "*****************************************************"$
(%i5) f(x):=(1-x)/sqrt(2*x-x^2);
```

(%o5) $f\left(x\right):=\frac{1-x}{\sqrt{2\,x-x^2}}$

```
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) solve(f(x),x);
```

(%o7) $[\,x=1\,]$

```
(%i8) ab:diff(f(x),x);
```

(%o8) $-\frac{1}{\sqrt{2\,x-x^2}}-\frac{\left(2-2\,x\right)\left(1-x\right)}{2\left(2\,x-x^2\right)^{3/2}}$

```
(%i9) solve(ab=0,x);
```

(%o9) $[\,]$

```
(%i10) ab2:diff(f(x),x,2);
```

(%o10) $\frac{1-x}{\left(2\,x-x^2\right)^{3/2}}+\frac{2-2\,x}{\left(2\,x-x^2\right)^{3/2}}+\frac{3\left(2-2\,x\right)^2\left(1-x\right)}{4\left(2\,x-x^2\right)^{5/2}}$

```
(%i11) solve(ab2=0,x);
```

(%o11) $[\,x=1\,]$

```
(%i12) nenner:denom(f(x));
```

(%o12) $\sqrt{2\,x-x^2}$

```
(%i13) solve(nenner=0,x);
```

(%o13) $[\,x=0\,,\,x=2\,]$

```
(%i14)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Nicht immer gibt es Pole                           "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) f(x):=(x^3-6*x^2+12*x-8)/(x^2-4*x+4);
```

(%o4) $f(x) := \frac{x^3 - 6\,x^2 + 12\,x - 8}{x^2 - 4\,x + 4}$

```
(%i5) zaehler:num(f(x),x);
```

(%o5) $x^3 - 6\,x^2 + 12\,x - 8$

```
(%i6) nenner:denom(f(x),x);
```

(%o6) $x^2 - 4\,x + 4$

```
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) solve(zaehler=0,x);
(%o8) [ x = 2 ]
(%i9) solve(nenner=0,x);
(%o9) [ x = 2 ]
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) factor(f(x));
(%o11) x - 2
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) " Es gibt nur eine Nullstelle, keinen Pol           "$
(%i14) "*****************************************************"$
(%i15)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Nullstellen eines Polynoms "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) p3(x):=x^3+x-1;
```

(%o4) $p3(x) := x^3 + x - 1$

```
(%i5) "*****************************************************"$
(%i6) allroots(p3(x));
(%o6) [ x = 0.68232780382801939 , x = 1.161541399997251 %i -
0.34116390191400969 , x = - 1.161541399997251 %i - 0.34116390191400969 ]
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) " Das ist die Lösung mit ALLROOTS "$
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) solve(p3(x)=0,x);
```

(%o10)
$$\left[x = \left(\frac{\sqrt{31}}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^{1/3} \left(-\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}}{3\left(\frac{\sqrt{31}}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^{1/3}},\ x = \left(\frac{\sqrt{31}}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{-\frac{\sqrt{3}\,\%i}{2} - \frac{1}{2}}{3\left(\frac{\sqrt{31}}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^{1/3}},\ x = \left(\frac{\sqrt{31}}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^{1/3} - \frac{1}{3\left(\frac{\sqrt{31}}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^{1/3}} \right]$$

```
(%i11) %,numer;
(%o11) [ x = 1.0117801418773178 (- 0.8660254037844386 %i - 0.5) -
0.32945233804929852 (0.8660254037844386 %i - 0.5) , x = 1.0117801418773178
(0.8660254037844386 %i - 0.5) - 0.32945233804929852
(- 0.8660254037844386 %i - 0.5) , x = 0.68232780382801927 ]
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13) " Das ist die Lösung mit SOLVE "$
(%i14) "*****************************************************"$
(%i15)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Nullstellen und Pole "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) y(x):=(x^4-3*x^3+3*x^2-x)/(x^3+x^2-x-1);
```

(%o4) $y(x) := \frac{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}{x^3 + x^2 - x - 1}$

wo der Zähler NULL ist, gibt es wahrscheinlich Nullstellen, wo der Nenner NULL ist, gibt es wahrscheinlich Pole

```
(%i5) zaehler:num(y(x));
```

(%o5) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

```
(%i6) nenner:denom(y(x));
```

(%o6) $x^3 + x^2 - x - 1$

```
(%i7) "****************************************************"$
(%i8) " Zerlegung in Zaehler und Nenner "$
(%i9) "****************************************************"$
(%i10) solve(zaehler=0,x);
(%o10) [ x = 1 , x = 0 ]
(%i12) solve(nenner=0,x);
(%o12) [ x = 1 , x = - 1 ]
(%i13) factor(zaehler);
```

(%o13) $(x-1)^3 x$

```
(%i14) factor(nenner);
```

(%o14) $(x-1)(x+1)^2$

```
(%i15) "****************************************************"$
(%i16) " Man kann also durch x-1 kürzen, x=1 ist kein Pol "$
(%i17) "****************************************************"$
(%i19) factor(y(x));
```

(%o19) $\frac{(x-1)^2 x}{(x+1)^2}$

```
(%i20) f(x):=(x-1)^2*x/(x+1)^2;
```

(%o20) $f(x) := \frac{(x-1)^2 x}{(x+1)^2}$

```
(%i21) f(1);
(%o21) 0
```

```
(%i22) f(0);
(%o22)  0
(%i23) "****************************************************"$
(%i24) " Das muss ja sein, weil es Nullstellen sind "$
(%i25) "****************************************************"$
(%i26)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Nullstellen und Pole "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) f(x):=x^3/(x^3-2*x^2-4*x+8);
```

(%o4) $f(x) := \dfrac{x^3}{x^3 - 2\,x^2 + (-4)\,x + 8}$

```
(%i5) zaehler:num(f(x));
```

(%o5) x^3

```
(%i6) nenner:denom(f(x));
```

(%o6) $x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 8$

```
(%i7) "****************************************************"$
(%i8) " Zerlegung in Zähler und Nenner "$
(%i9) "****************************************************"$
(%i10) solve(zaehler=0,x);
(%o10) [ x = 0 ]
(%i11) solve(nenner=0,x);
(%o11) [ x = - 2 , x = 2 ]
(%i12) f(0);
(%o12) 0
(%i14) "****************************************************"$
(%i15) " Am Punkt N(0(0) ist eine Nullstelle "$
(%i16) " Es gibt zwei Pole x=-2 und x=2 "$
(%i17) "****************************************************"$
(%i18)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Nullstellen und Pole "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) f(x):=10*x^2/(x^4+5*x^3+7*x^2+5*x+6);
```

(%o4) $f(x) := \dfrac{10\ x^2}{x^4 + 5\ x^3 + 7\ x^2 + 5\ x + 6}$

```
(%i5) zaehler:num(f(x));
```

(%o5) $10\ x^2$

```
(%i6) nenner:denom(f(x));
```

(%o6) $x^4 + 5\ x^3 + 7\ x^2 + 5\ x + 6$

```
(%i7) solve(zaehler=0,x);
(%o7) [ x = 0 ]
(%i8) solve(nenner=0,x);
(%o8) [ x = - 3 , x = - 2 , x = - %i , x = %i ]
(%i9) "****************************************************"$
(%i10) " Es gibt eine Nullstelle und zwei Pole "$
(%i11) "****************************************************"$
(%i12)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Nullstellen und Pole "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) f(x):=(x^4-4*x^3+12*x^2+4*x-13)/(2*x^3-4*x^2-8*x+16);
```

(%o4) $f(x) := \frac{x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 4x - 13}{2x^3 - 4x^2 + (-8)x + 16}$

```
(%i5) zaehler:num(f(x));
```

(%o5) $x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 4x - 13$

```
(%i6) nenner:denom(f(x));
```

(%o6) $2x^3 - 4x^2 - 8x + 16$

```
(%i7) allroots(zaehler);
(%o7)  [ x = 0.99999999999999989 , x = - 1.0 , x = 3.0 %i + 2.0 , x = 2.0 -
3.0 %i ]
(%i8) allroots(nenner);
(%o8)  [ x = 1.9999999701976905 , x = 2.0000000298023353 , x = -
2.0000000000000258 ]
(%i9) solve(zaehler=0,x);
(%o9)  [ x = 1 , x = - 1 , x = 2 - 3 %i , x = 3 %i + 2 ]
(%i10) solve(nenner=0,x);
(%o10)  [ x = - 2 , x = 2 ]
(%i11) "**************************************************"$
(%i12) " Das sind "$
(%i13) " a) die Nullstellen (%o9)"$
(%i14) " b) die Pole (%o10)"$
(%i15) "**************************************************"$
(%i16)
```

(%i1) `f1(x):=(x-1)/(x+5);`

(%o1) $f1(x) := \frac{x-1}{x+5}$

(%i2) `zahler:num(f1(x));`

(%o2) $x - 1$

(%i3) `nenner:denom(f1(x));`

(%o3) $x + 5$

(%i4) `solve(zahler=0,x);`

(%o4) $[x = 1]$

(%i5) `"==================================================="$`

(%i6) `" Nullstelle                                        "$`

(%i7) `"==================================================="$`

(%i8) `solve(nenner=0,x);`

(%o8) $[x = -5]$

(%i9) `"==================================================="$`

(%i10) `" Pol                                               "$`

(%i11) `"==================================================="$`

(%i12) `f2(x):=3/(2*x^2-4);`

(%o12) $f2(x) := \frac{3}{2\,x^2 - 4}$

(%i13) `zaehler:num(f2(x));`

(%o13) 3

(%i15) `nenner:denom(f2(x));`

(%o15) $2\,x^2 - 4$

(%i16) `solve(zaehler=0,x);`

(%o16) $[\,]$

(%i17) `"==================================================="$`

(%i18) `" Es gibt keine  Nullstelle                         "$`

(%i19) `"==================================================="$`

(%i20) `solve(nenner=0,x);`

(%o20) $[x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}]$

(%i21) `"==================================================="$`

(%i22) `" Das sind die Pole                                 "$`

(%i23) `"==================================================="$`

(%i24) `f3(x):=5*x/(7*x^2-3*x);`

(%o24) $f3(x) := \frac{5\,x}{7\,x^2 - 3\,x}$

(%i25) `zaehler:num(f3(x));`

(%o25) $5\,x$

```
(%i26) nenner:denom(f3(x));
```
(%o26) $7\ x^2 - 3\ x$

```
(%i27) solve(zaehler=0,x);
```
(%o27) $[\ x = 0\ ]$

```
(%i28) "=================================================="$
(%i29) " Hier ist eine Nullstelle                         "$
(%i30) "=================================================="$
(%i31) solve(nenner=0,x);
```
(%o31) $[\ x = \frac{3}{7}\ ,\ x = 0\ ]$

```
(%i32) "=================================================="$
(%i33) " Es gibt nur den Pol 3/7, warum?                  "$
(%i34) "=================================================="$
```
x = 0 ist auch eine Nullstelle, am kann kürzen

```
(%i39) f4(x):=(x^2-6*x+8)/x;
```
(%o39) $f4(x) := \frac{x^2 - 6\ x + 8}{x}$

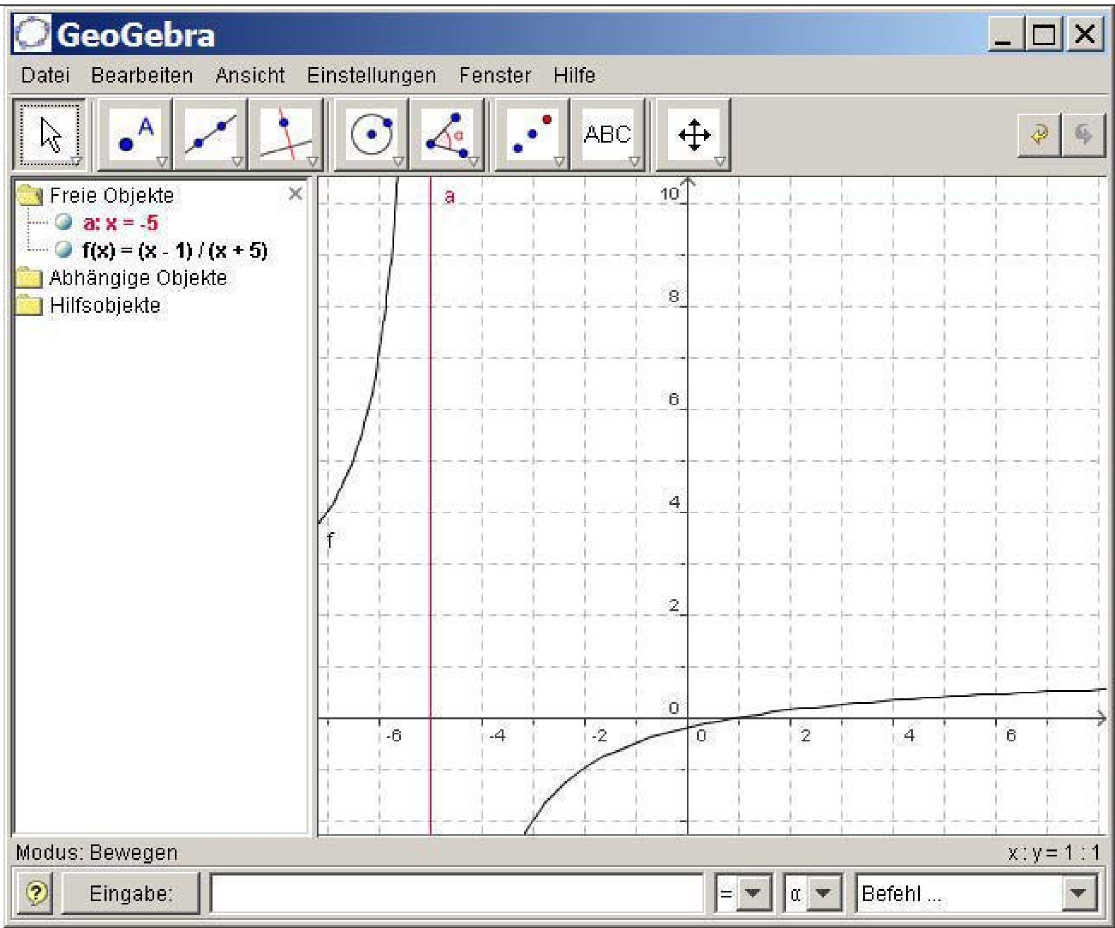
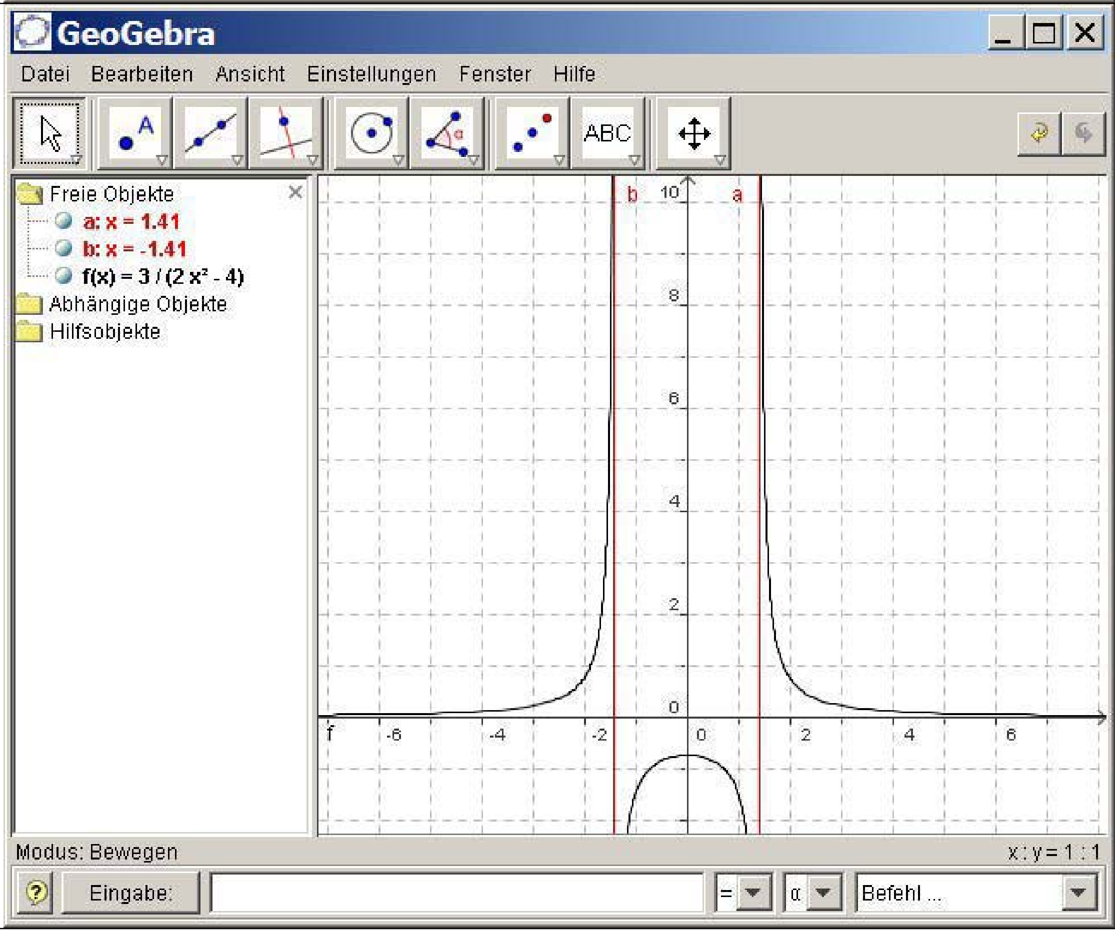
```
(%i40) zaehler:num(f4(x));
```
(%o40) $x^2 - 6\ x + 8$

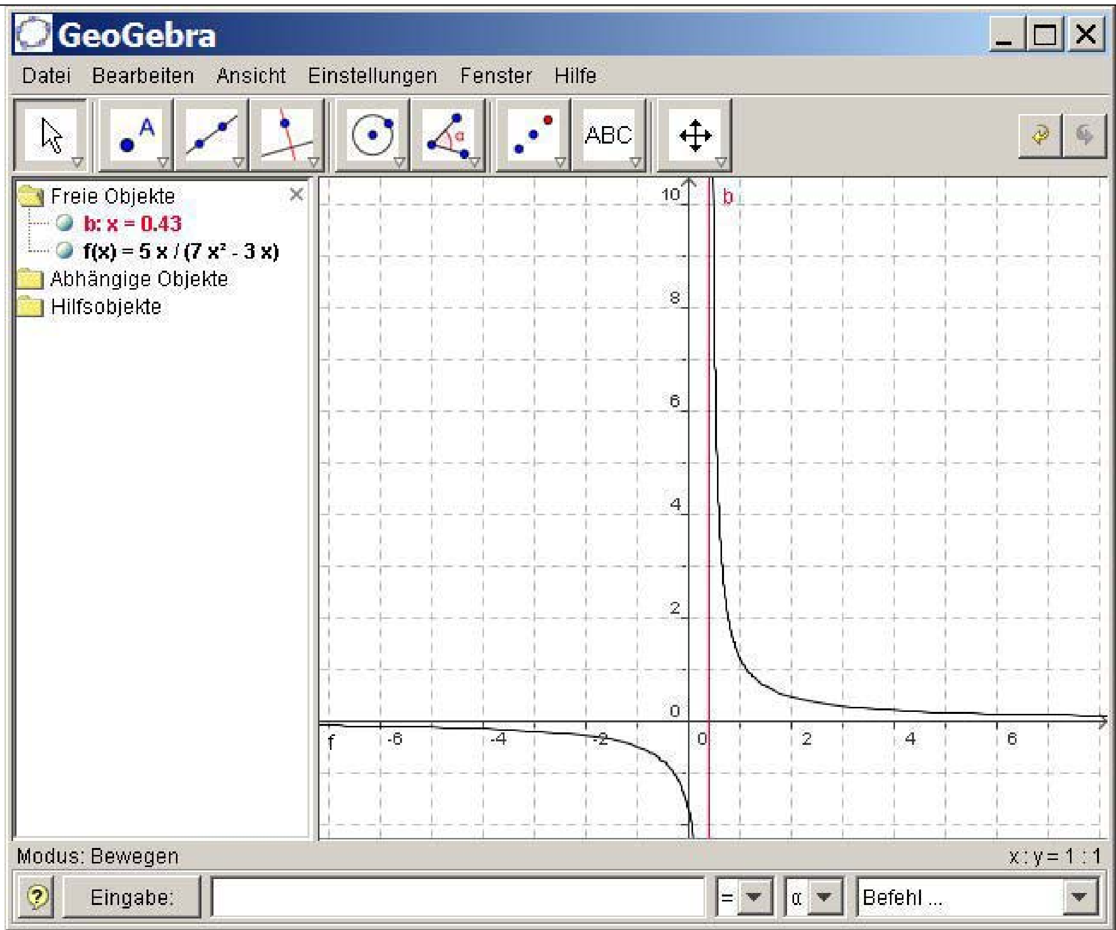
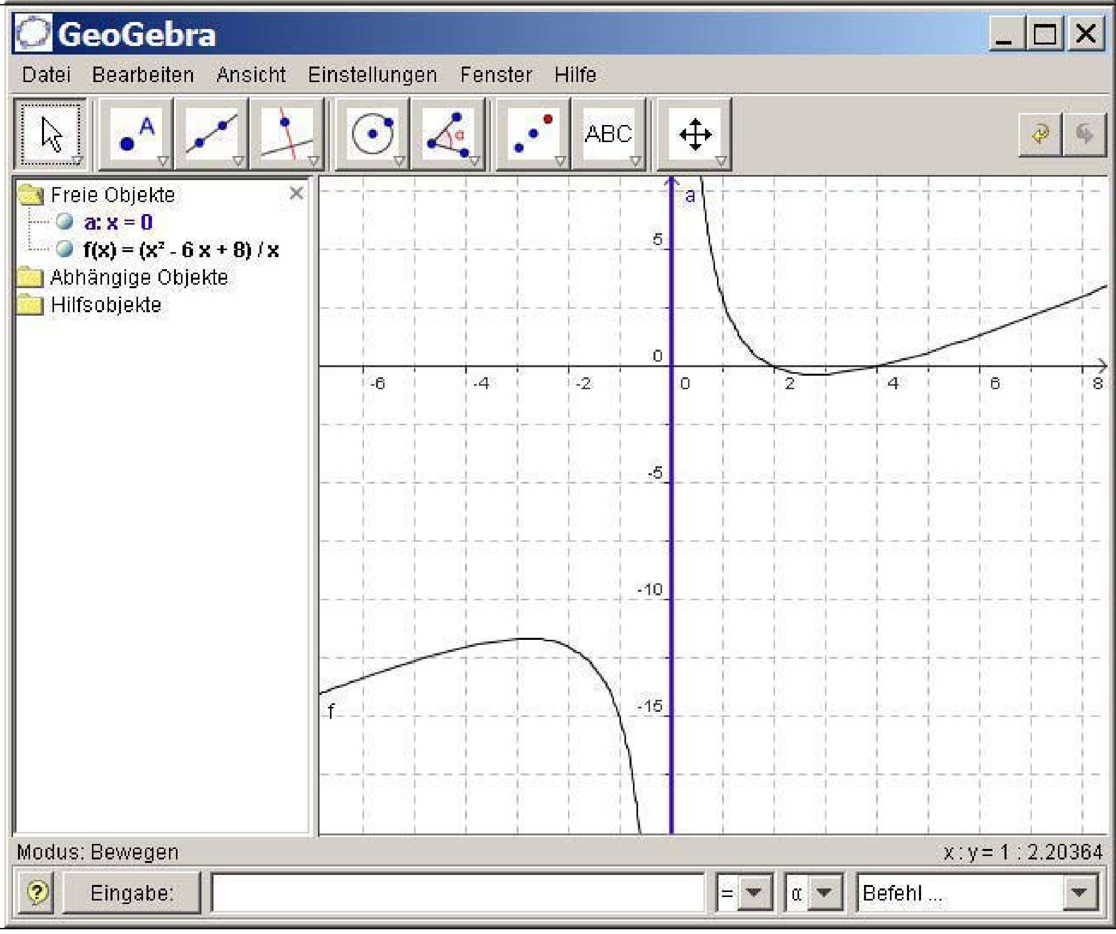
```
(%i41) nenner:denom(f4(x));
```
(%o41) x

```
(%i42) solve(zaehler=0,x);
```
(%o42) $[\ x = 4\ ,\ x = 2\ ]$

```
(%i43) "=================================================="$
(%i44) " Zwei Nullstellen                                 "$
(%i45) "=================================================="$
(%i47) solve(nenner=0,x);
```
(%o47) $[\ x = 0\ ]$

```
(%i48) "=================================================="$
(%i49) " Das ist der Pol                                  "$
(%i50) "=================================================="$
(%i51)
```

f1(x)	GeoGebra Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Fenster Hilfe ABC Freie Objekte a: x = -5 f(x) = (x - 1) / (x + 5) Abhängige Objekte Hilfsobjekte a f Modus: Bewegen x : y = 1 : 1 Eingabe: Befehl ...
f2(x)	GeoGebra Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Fenster Hilfe ABC Freie Objekte a: x = 1.41 b: x = -1.41 f(x) = 3 / (2 x² - 4) Abhängige Objekte Hilfsobjekte b a f Modus: Bewegen x : y = 1 : 1 Eingabe: Befehl ...

<table>
<tr><td>f3(x)</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>f4(x)</td><td>
</td><td></td></tr>
</table>

(%i1) `f1(x):=2/(x^2-6*x+8);`

(%o1) $f1(x) := \frac{2}{x^2 - 6\ x + 8}$

(%i2) `f2(x):=(3*x-4)/(x^2-7*x+10);`

(%o2) $f2(x) := \frac{3\ x - 4}{x^2 - 7\ x + 10}$

(%i3) `f3(x):=(x^2-6*x-5)/(2*x^2-5*x+2);`

(%o3) $f3(x) := \frac{x^2 - 6\ x - 5}{2\ x^2 - 5\ x + 2}$

(%i4) `f4(x):=(8*x^2-85*x+225)/(2*x^2+17*x+30);`

(%o4) $f4(x) := \frac{8\ x^2 - 85\ x + 225}{2\ x^2 + 17\ x + 30}$

(%i5) `"=====================================================$"`

(%i6) `nenner(x):=denom(x);`

(%o6) $nenner(x) := denom(x)$

(%i7) `n1:nenner(f1(x));`

(%o7) $x^2 - 6\ x + 8$

(%i8) `solve(n1=0,x);`

(%o8) $[\ x = 4\ ,\ x = 2\ ]$

(%i9) `"=====================================================$"`

(%i10) `expand(f1(x));`

(%o10) $\frac{2}{x^2 - 6\ x + 8}$

(%i11) `"=====================================================$"`

(%i12) `" Es gibt zwei Pole                                    "$`

(%i13) `"=====================================================$"`

(%i14) `n2:nenner(f2(x));`

(%o14) $x^2 - 7\ x + 10$

(%i15) `solve(n2=0,x);`

(%o15) $[\ x = 5\ ,\ x = 2\ ]$

(%i16) `"=====================================================$"`

(%i17) `expand(f2(x));`

(%o17) $\frac{3\ x}{x^2 - 7\ x + 10} - \frac{4}{x^2 - 7\ x + 10}$

(%i18) `factor(f2(x));`

(%o18) $\frac{3\ x - 4}{(x - 5)\ (x - 2)}$

(%i19) `"=====================================================$"`

(%i20) `" Es gibt zwei Pole                                    "$`

(%i21) "=="$

(%i22) n3:nenner(f3(x));

(%o22) $2\ x^2 - 5\ x + 2$

(%i23) solve(n3=0,x);

(%o23) $[\ x = 2\ ,\ x = \frac{1}{2}\ ]$

(%i24) "=="$

(%i25) factor(f3(x));

(%o25) $\frac{x^2 - 6\ x - 5}{(x - 2)\ (2\ x - 1)}$

(%i26) "=="$

(%i27) " Es gibt zwei Pole   "$

(%i28) "=="$

(%i29) n4:nenner(f4(x));

(%o29) $2\ x^2 + 17\ x + 30$

(%i30) solve(n4=0,x);

(%o30) $[\ x = -\ 6\ ,\ x = -\ \frac{5}{2}\ ]$

(%i31) "=="$

(%i32) factor(f4(x));

(%o32) $\frac{(x - 5)\ (8\ x - 45)}{(x + 6)\ (2\ x + 5)}$

(%i33) "=="$

(%i34) " Es gibt zwei Pole   "$

(%i35) "=="$

(%i36)

```
(%i1) "================================================"$
(%i2) " Funktion dritten Grades                        "$
(%i3) "================================================"$
(%i4) x:[10,20,30,40];
(%o4) [ 10 , 20 , 30 , 40 ]
(%i5) y:x^3-3*x^2+3*x-1;
(%o5) [ 729 , 6859 , 24389 , 59319 ]
(%i7) "================================================"$
(%i8) g(x,y):=y=a*x^3+b*x^2+c*x+d;
```

(%o8) $g(x, y) := y = a\ x^3 + b\ x^2 + c\ x + d$

```
(%i9) "================================================"$
(%i10) g1:g(x[1],y[1]);
```

(%o10) $729 = d + 10\ c + 100\ b + 1000\ a$

```
(%i11) g2:g(x[2],y[2]);
```

(%o11) $6859 = d + 20\ c + 400\ b + 8000\ a$

```
(%i12) g3:g(x[3],y[3]);
```

(%o12) $24389 = d + 30\ c + 900\ b + 27000\ a$

```
(%i13) g4:g(x[4],y[4]);
```

(%o13) $59319 = d + 40\ c + 1600\ b + 64000\ a$

```
(%i14) "================================================"$
(%i15) solve([g1,g2,g3,g4],[a,b,c,d]);
```

(%o15) $[[a = 1, b = -3, c = 3, d = -1]]$

```
(%i16) "================================================"$
(%i17) algsys([g1,g2,g3,g4],[a,b,c,d]);
```

(%o17) $[[a = 1, b = -3, c = 3, d = -1]]$

```
(%i18) "================================================"$
(%i19)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Umgekehrte Kurvendiskussion "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) f(x):=a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e;
```

(%o4) $f(x) := a\ x^4 + b\ x^3 + c\ x^2 + d\ x + e$

```
(%i5) ab:diff(f(x),x);
```

(%o5) $4\ a\ x^3 + 3\ b\ x^2 + 2\ c\ x + d$

```
(%i6) ab,x=0;
(%o6)  d
(%i7) g:%=2;
(%o7)  d = 2
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) " Gesucht: Polynom 4. Grades "$
(%i10) " Für x=0 gibt es eine Tangente mit der Steigung 2 "$
(%i11) "*****************************************************"$
(%i12) ab2:diff(f(x),x,2);
```

(%o12) $12\ a\ x^2 + 6\ b\ x + 2\ c$

```
(%i14) ab2,x=0;
(%o14)  2 c
(%i15) g:%=-282;
(%o15)  2 c = - 282
(%i16) solve(g,c);
(%o16)  [ c = - 141 ]
(%i17) "*****************************************************"$
(%i18) " Für x=0 ist die zweite Ableitung -282 "$
(%i19) "*****************************************************"$
(%i20) ab3:diff(f(x),x,3);
(%o20)  24 a x + 6 b
(%i21) ab3,x=0;
(%o21)  6 b
(%i22) g:%=12;
(%o22)  6 b = 12
```

```
(%i23) solve(g,b);
(%o23)  [ b = 2 ]
(%i24) "****************************************************"$
(%i25) " Für x=0 ist die dritte Ableitung 12 "$
(%i26) "****************************************************"$
(%i27) ab4:diff(f(x),x,4);
(%o27)  24 a
(%i28) ab4,x=0;
(%o28)  24 a
(%i29) g:%=24;
(%o29)  24 a = 24
(%i30) solve(g,a);
(%o30)  [ a = 1 ]
(%i31) "****************************************************"$
(%i32) " Für x=0 ist die vierte Ableitung 24 "$
(%i33) "****************************************************"$
(%i34) f(1)=-135;
(%o34)  e + d + c + b + a = - 135
(%i35) g1:%;
(%o35)  e + d + c + b + a = - 135
(%i36) g2:a=1;
(%o36)  a = 1
(%i37) g3:b=2;
(%o37)  b = 2
(%i38) g4:c=-141;
(%o38)  c = - 141
(%i39) g5:d=2;
(%o39)  d = 2
(%i40) solve([g1,g2,g3,g4,g5],[a,b,c,d,e]);
(%o40)  [ [ a = 1 , b = 2 , c = - 141 , d = 2 , e = 1 ] ]
(%i41) "****************************************************"$
(%i42) " Damit kennen wir auch e = 1 "$
(%i43) "****************************************************"$
(%i44) e:1;
(%o44)  1
(%i47) f(x):=x^4+2*x^3-141*x^2+2*x+1;
```

(%o47) $f(x) := x^4 + 2\, x^3 + (-141)\, x^2 + 2\, x + 1$

```
(%i48) "****************************************************"$
```

```
(%i1) "Bestimme die optimale Losgröße (Wilsonsche Formel):
x = Losgröße
k0 = Fixkosten
k1 = proportionale Kosten
h = Lagerkosten pro Stück und Zeiteinheit
m = die als konstant angenommene Nachfrage pro Zeiteinheit
"$
(%i2) K(x):=k0+k1*x+h/(2*m)*x^2;
```

ein schönes Beispiel aus der Betriebswirtschaftslehre

(%o2) $K(x) := k0 + k1\ x + \frac{h}{2\ m}\ x^2$

```
(%i3) DK(x):=K(x)/x;
```

(%o3) $DK(x) := \frac{K(x)}{x}$

```
(%i4) ab:diff(DK(x),x);
```

(%o4) $\frac{\frac{h\ x}{m} + k1}{x} - \frac{\frac{h\ x^2}{2\ m} + k1\ x + k0}{x^2}$

```
(%i5) solve(ab=0,x);
```

(%o5) $[\ x = -\sqrt{2}\ \sqrt{\frac{k0\ m}{h}}\ ,\ x = \sqrt{2}\ \sqrt{\frac{k0\ m}{h}}\ ]$

```
(%i6) "****************************************************"$
(%i7) " Positive Lösung: Wilsonsche Formel                 "$
(%i8) "****************************************************"$
(%i9)
```

wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.

(%i1) Kosten_einer_Bestellung:1000;

(%o1) 1000

(%i2) Anzahl_der_Bestellungen:n;

(%o2) n

(%i3) Bestellkosten:Kosten_einer_Bestellung*Anzahl_der_Bestellungen;

(%o3) 1000 n

(%i4) "**"$

(%i5) Jahresbedarf:25000;

(%o5) 25000

(%i6) Bestellmenge:Jahresbedarf/Anzahl_der_Bestellungen;

(%o6) $\frac{25000}{n}$

(%i7) "**"$

(%i8) durchschnittlicher_Lagerbestand:Bestellmenge/2;

(%o8) $\frac{12500}{n}$

(%i9) "**"$

(%i10) Preis_Einheit:30;

(%o10) 30

(%i11) Zinssatz:10/100;

(%o11) $\frac{1}{10}$

(%i12)
durchschnittliche_Kapitalbindung:durchschnittlicher_Lagerbestand*Preis_Einhei

(%o12) $\frac{375000}{n}$

(%i13)
Kosten_der_Kapitalbindung:durchschnittliche_Kapitalbindung*Zinssatz;

(%o13) $\frac{37500}{n}$

(%i14) "**"$

(%i15) Lagerhaltungskosten:Bestellkosten+Kosten_der_Kapitalbindung;

(%o15) $1000\,n+\frac{37500}{n}$

(%i16) `ab:diff(Lagerhaltungskosten,n);`

(%o16) $$1000 - \frac{37500}{n^2}$$

(%i17) `solve(ab=0,n);`

(%o17) $$\left[n = -\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} , n = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right]$$

(%i18) `%,numer;`

(%o18) [n = - 6.123724356957945 , n = 6.123724356957945]

(%i20) `"***************************************************"$`

(%i22) `ab2:diff(Lagerhaltungskosten,n,2);`

(%o22) $$\frac{75000}{n^3}$$

(%i23) `ab2,n=6.12;`

(%o23) 327.1952550510571

(%i24) `"***************************************************"$`

(%i25) `" Die zweite Ableitung ist NULL, daher liegt ein Minimum vor "$`

(%i26) `"***************************************************"$`

(%i27) `L(n):=c*n+x/(2*n)*p*i/100;`

(%o27) $$L(n) := c\,n + \frac{\frac{x}{2\,n}\,p\,i}{100}$$

(%i28) `ab:diff(L(n),n);`

(%o28) $$c - \frac{i\,p\,x}{200\,n^2}$$

(%i29) `solve(ab=0,n);`

(%o29) $$\left[n = -\frac{\sqrt{\frac{i\,p\,x}{c}}}{10\sqrt{2}} , n = \frac{\sqrt{\frac{i\,p\,x}{c}}}{10\sqrt{2}} \right]$$

(%i30) `%,numer;`

(%o30) $$\left[n = -0.07071067811865476 \left(\frac{i\,p\,x}{c}\right)^{0.5} , n = 0.07071067811865476 \left(\frac{i\,p\,x}{c}\right)^{0.5} \right]$$

(%i32) `n:sqrt(p*x*i)/sqrt(200);`

(%o32) $$\frac{\sqrt{i\,p\,x}}{10\sqrt{2}}$$

(%i34) `Bestellmenge:x/n;`

(%o34) $$\frac{10\sqrt{2}\,x}{\sqrt{i\,p\,x}}$$

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Rechenregeln für Logarithmen                     "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) Regel1(x,y):=log(x*y)=log(x)+log(y);
```

(%o4) $\mathrm{Regel1}(x, y) := \log(x\,y) = \log(x) + \log(y)$

```
(%i5) Regel2(x,y):=log(x/y)=log(x)-log(y);
```

(%o5) $\mathrm{Regel2}(x, y) := \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

```
(%i6) Regel3(x,y):=log(x^y)=y*log(x);
```

(%o6) $\mathrm{Regel3}(x, y) := \log\left(x^{y}\right) = y\,\log(x)$

```
(%i7)
```

Rechenregeln

```
(%i1) g1:-14*y=-200+6*x;
(%o1)  - 14 y = 6 x - 200
(%i2) g2:2*x+5*y=67;
(%o2)  5 y + 2 x = 67
(%i3) A:coefmatrix([g1,g2],[x,y]);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} -6 & -14 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

```
(%i4) b:matrix([-200], [67]);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} -200 \\ 67 \end{bmatrix}$

```
(%i5) Loesung:invert(A).b;
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 31 \\ 1 \end{bmatrix}$

```
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) g1:-33*x=153+51*y;
(%o7)  - 33 x = 51 y + 153
(%i8) g2:(13*x-15*y)/2=-727/2;
```

(%o8) $\frac{13\ x - 15\ y}{2} = -\frac{727}{2}$

```
(%i10) A:coefmatrix([g1,g2],[x,y]);
```

(%o10) $\begin{bmatrix} -33 & -51 \\ \frac{13}{2} & -\frac{15}{2} \end{bmatrix}$

```
(%i11) b:matrix([153], [-727/2]);
```

(%o11) $\begin{bmatrix} 153 \\ -\frac{727}{2} \end{bmatrix}$

```
(%i12) Loesung:invert(A).b;
```

(%o12) $\begin{bmatrix} -34 \\ 19 \end{bmatrix}$

```
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14) g1:3*x-4*y=77;
(%o14)  3 x - 4 y = 77
(%i15) g2:317/5+16/15*y=x;
```

(%o15) $\frac{16\ y}{15} + \frac{317}{5} = x$

```
(%i16) A:coefmatrix([g1,g2],[x,y]);
```

(%o16) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & \frac{16}{15} \end{bmatrix}$

(%i17) `b:matrix([77], [-317/15]);`

(%o17) $\begin{bmatrix} 77 \\ -\frac{317}{15} \end{bmatrix}$

(%i18) `Loesung:invert(A).b;`

(%o18) $\begin{bmatrix} 3 \\ -17 \end{bmatrix}$

(%i19)

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Umsatz der einzelnen Filialen                    "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) a:matrix([120], [234], [38]);
```

Anwendung der Matrizenrechnung in der Wirtschaft

(%o4) $\begin{bmatrix} 120 \\ 234 \\ 38 \end{bmatrix}$

```
(%i5) b:matrix([20], [264], [39]);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 20 \\ 264 \\ 39 \end{bmatrix}$

```
(%i6) c:matrix([220], [34], [68]);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 220 \\ 34 \\ 68 \end{bmatrix}$

```
(%i7) d:matrix([123], [23], [383]);
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 123 \\ 23 \\ 383 \end{bmatrix}$

```
(%i8) Gesamtabsatz:a+b+c+d;
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 483 \\ 555 \\ 528 \end{bmatrix}$

```
(%i9) p:matrix([300], [120], [800]);
```

(%o9) $\begin{bmatrix} 300 \\ 120 \\ 800 \end{bmatrix}$

```
(%i10) preis:transpose(p);
```

(%o10) $\begin{bmatrix} 300 & 120 & 800 \end{bmatrix}$

```
(%i11) Umsatz_a:preis.a;
(%o11) 94480
(%i12) Umsatz_b:preis.b;
(%o12) 68880
(%i13) Umsatz_c:preis.c;
(%o13) 124480
(%i14) Umsatz_d:preis.d;
```

```
(%o14)  346060
(%i15)  "**************************************************"$
(%i16)  " Abrechnung einer Möbelfirma mit 4 Filialen         "$
(%i17)  "**************************************************"$
(%i18)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) m:matrix([1,2,3], [-3,2,4], [2,-3,1]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i2) determinant(m);
```

(%o2) 51

```
(%i3) invert(m);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} \frac{14}{51} & -\frac{11}{51} & \frac{2}{51} \\ \frac{11}{51} & -\frac{5}{51} & -\frac{13}{51} \\ \frac{5}{51} & \frac{7}{51} & \frac{8}{51} \end{bmatrix}$

```
(%i4) determinant(invert(m));
```

(%o4) $\frac{1}{51}$

```
(%i5)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Diagonalmatrix "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) a:diagmatrix(3,4);
```

im Unterricht der Sekundarstufe II haben wir die Diagonalmatrix noch nicht gebraucht

(%o4) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

```
(%i5) b:diagmatrix(4,1);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i6) c:diagmatrix(5,1);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i7) invert(a);
```

(%o7) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

```
(%i8) invert(b);
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i9) invert(c);
```

(%o9) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i10)

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Einfache Matrizenrechnung "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) A:matrix([1,1], [1,-1]);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

```
(%i5) B:matrix([2,3], [-4,1]);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) C:A+B;
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i8) D:A-B;
```

(%o8) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

```
(%i9) E:A.B;
```

(%o9) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i10) F:invert(A);
```

(%o10) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

```
(%i11) G:invert(B);
```

(%o11) $\begin{bmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

```
(%i12) H:A.F;
```

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i13) I:B.G;

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i14)

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " EINHEITSMATRIZEN "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) A:ident(2);
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) B:ident(3);
```

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i6) C:ident(4);
```

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i7) D:ident(5);
```

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) X1:A+4*A;
```

$$(\%o9)\quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

```
(%i10) X2:B-3* B;
```

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
(%i11) X4:C+10*C;
```

(%o11) $$\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

(%i12) `X5:D+2*D;`

(%o12) $$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(%i13)

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) a:matrix([1,2,3], [-3,2,-4], [1,-2,8]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

```
(%i2) invert(a);
```

(%o2) $\begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{11}{30} & -\frac{7}{30} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$

```
(%i3) a.invert(a);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i4) "*****************************************************"$
(%i6) " a) Matrixeingabe "$
(%i7) " b) inverse Matrix "$
(%i10) " c) Probe: Matrix . Inverse = Einheitsmatrix "$
(%i11) "*****************************************************"$
(%i12)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Inverse und Determinanten "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) A:matrix([1,0,0], [3,-2,4], [-2,3,-1]);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

```
(%i5) determinant(A);
```

(%o5) -10

```
(%i6) B:invert(A);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

```
(%i7) determinant(B);
```

(%o7) $-\frac{1}{10}$

```
(%i8) C:A.B;
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i9) determinant(C);
```

(%o9) 1

```
(%i10) "****************************************************"$
(%i11) D:4*A;
```

(%o11) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 12 & -8 & 16 \\ -8 & 12 & -4 \end{bmatrix}$

```
(%i12) E:invert(D);
```

(%o12) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{40} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{40} & \frac{1}{20} \end{bmatrix}$

(%i13) determinant(D);

(%o13) -640

(%i14) determinant(E);

(%o14) $-\frac{1}{640}$

(%i15) F:D.E;

(%o15) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i16) determinant(F);

(%o16) 1

(%i17)

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Berechnung von Determinanten                     "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) A:matrix([1,2,0], [0,-3,0], [1,4,0]);
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) determinant(A);
(%o5) 0
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) " In der dritten Spalte steht ein Nullvektor       "$
(%i8) "**************************************************"$
(%i9) B:matrix([1,-2,0], [0,0,0], [-3,2,10]);
```

$$(\%o9)\quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

```
(%i10) determinant(B);
(%o10) 0
(%i11) "**************************************************"$
(%i13) " In der zweiten Zeile steht ein Nullvektor        "$
(%i14) "**************************************************"$
(%i15) C:matrix([-1,4,-5], [-2,1,-10], [6,-12,30]);
```

$$(\%o15)\quad \begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -10 \\ 6 & -12 & 30 \end{bmatrix}$$

```
(%i16) determinant(C);
(%o16) 0
(%i17) "**************************************************"$
(%i18) " Die dritte Spalte ist das 5-fache der ersten Spalte"$
(%i19) "**************************************************"$
(%i20) D:matrix([2,-3,12], [3,-1,2], [4,-6,24]);
```

$$(\%o20)\quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 24 \end{bmatrix}$$

```
(%i21) determinant(D);
(%o21) 0
(%i22) "**************************************************"$
```

```
(%i23) " Die dritte Zeile ist das 2-fache der ersten Zeile  "$
(%i24) "*****************************************************"$
(%i25) E:matrix([2,1,2,-1], [-3,5,-8,1], [1,5,1,0], [-1,6,-6,0]);
```

(%o25) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i26) determinant(E);
```

(%o26) 0

```
(%i27) "*****************************************************"$
(%i28) " Die vierte Zeile ist die Summe der ersten 2 Zeilen "$
(%i29) "*****************************************************"$
(%i30) F:matrix([1,2,3], [3,-1,2], [-5,4,-1]);
```

(%o30) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

```
(%i31) determinant(F);
```

(%o31) 0

```
(%i32) "*****************************************************"$
(%i33) " Die dritte Spalte ist die Summer der ersten 2 Sp.  "$
(%i34) "*****************************************************"$
(%i35) G:matrix([4,-3,4], [-20,15,-20], [2,4,2]);
```

(%o35) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -20 & 15 & -20 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i36) determinant(A);
```

(%o36) 0

```
(%i37) "*****************************************************"$
(%i39) " Die erste und dritte Spalte sind gleich            "$
(%i40) "*****************************************************"$
(%i41) H:matrix([3,-2,4], [-5,1,2], [3,-2,4]);
```

(%o41) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

```
(%i42) determinant(H);
```

(%o42) 0

```
(%i43) "****************************************************"$
(%i44) " Die erste und dritte Zeilen sind gleich            "$
(%i45) "****************************************************"$
(%i46)
```

```
(%i1) "***************************************************"$
(%i2) " Berechne die Determinanten                        "$
(%i3) "***************************************************"$
(%i4) A:matrix([-1,3,1], [1,1,1], [-2,18,8]);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 18 & 8 \end{bmatrix}$

```
(%i5) determinant(A);
```

(%o5) 0

```
(%i6) "***************************************************"$
(%i7) B:matrix([2,5,18,-1], [4,-3,5,6], [-6,3,-9,3], [0,2,5,0]);
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 18 & -1 \\ 4 & -3 & 5 & 6 \\ -6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i8) determinant(B);
```

(%o8) 0

```
(%i9) "***************************************************"$
(%i10)
```

```
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) " Berechnung von Determinanten                     "$
(%i8) "**************************************************"$
(%i9) A:matrix([1,0,2,1], [0,1,-1,0], [0,4,0,4], [2,-3,-5,1]);
```

(%o9)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i10) determinant(A);
(%o10) 44
(%i11) "**************************************************"$
(%i12) B:matrix([4,2,1], [-2,1,0], [1,0,5]);
```

(%o12)
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

```
(%i13) determinant(B);
(%o13) 39
(%i14) "**************************************************"$
(%i15)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Determinanten von Vielfachen                      "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) A:matrix([1,1,1], [3,-4,2], [-2,1,4]);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

```
(%i5) determinant(A);
```

(%o5) -39

```
(%i6) B:1/39*A;
```

(%o6) $\begin{bmatrix} \frac{1}{39} & \frac{1}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{1}{13} & -\frac{4}{39} & \frac{2}{39} \\ -\frac{2}{39} & \frac{1}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix}$

```
(%i7) determinant(B);
```

(%o7) $-\frac{1}{1521}$

```
(%i8) C:2*A;
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & -8 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

```
(%i9) determinant(C);
```

(%o9) -312

```
(%i10) C:µ*A;
```

(%o10) $\begin{bmatrix} \mu & \mu & \mu \\ 3\mu & -4\mu & 2\mu \\ -2\mu & \mu & 4\mu \end{bmatrix}$

```
(%i11) determinant(C);
```

(%o11) $-39\mu^3$

```
(%i12) "**************************************************"$
(%i13) " Anmerkung: wird eine n-reihige Matrix mit µ       "$
(%i14) " multipliziert, so multipliziert sich die Deter-   "$
(%i15) " minante mit µ^n                                   "$
(%i16) "**************************************************"$
(%i17)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Determinanten von Blockmatrizen                   "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) A:matrix([a,b,0,0], [c,d,0,0], [0,0,e,f], [0,0,g,h]);
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{bmatrix}$$

```
(%i8) det:determinant(A);
```

$$(\%o8)\quad a\,d\,(e\,h-f\,g)-b\,c\,(e\,h-f\,g)$$

```
(%i9) P:matrix([a,b], [c,d]);
```

$$(\%o9)\quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

```
(%i10) p:determinant(P);
```

$$(\%o10)\quad a\,d-b\,c$$

```
(%i11) Q:matrix([e,f], [g,h]);
```

$$(\%o11)\quad \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

```
(%i12) q:determinant(Q);
```

$$(\%o12)\quad e\,h-f\,g$$

```
(%i13) det-p*q;
```

$$(\%o13)\quad -(a\,d-b\,c)(e\,h-f\,g)+a\,d\,(e\,h-f\,g)-b\,c\,(e\,h-f\,g)$$

```
(%i14) expand(%);
```

$$(\%o14)\quad 0$$

```
(%i15) "**************************************************"$
(%i16) " D.h. det A = det P . det Q                        "$
(%i17) "**************************************************"$
(%i18)
```

```
(%i1) "************************************************"$
(%i2) " Determinanten von Diagonalmatrizen              "$
(%i3) "************************************************"$
(%i4) A:matrix([a[1,1],0], [0,a[2,2]]);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{bmatrix}$

```
(%i5) determinant(A);
```

(%o5) $a_{1,1}\,a_{2,2}$

```
(%i6) "************************************************"$
(%i7) B:matrix([a[1,1],0,0], [0,a[2,2],0], [0,0,a[3,3]]);
```

(%o7) $\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{bmatrix}$

```
(%i8) determinant(B);
```

(%o8) $a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}$

```
(%i9) "************************************************"$
(%i10)
C:matrix([a[1,1],0,0,0], [0,a[2,2],0,0], [0,0,a[3,3],0], [0,0,0,a[4,4]])
;
```

(%o10) $\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4} \end{bmatrix}$

```
(%i11) determinant(C);
```

(%o11) $a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}\,a_{4,4}$

```
(%i12) "************************************************"$
(%i13) " Daraus kann man sicher eine allgemeine Regel    "$
(%i14) " ableiten                                        "$
(%i15) "************************************************"$
(%i16)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Determinanten von Matrizenprodukten              "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) A:matrix([1,2,0], [-1,5,3], [1,0,2]);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i5) B:matrix([1,1,1], [0,-5,3], [4,1,2]);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) C:A.B;
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 11 & -23 & 20 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

```
(%i8) D:B.A;
```

(%o8) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 8 & -25 & -9 \\ 5 & 13 & 7 \end{bmatrix}$

```
(%i9) "**************************************************"$
(%i11) a:determinant(A);
(%o11) 20
(%i12) b:determinant(B);
(%o12) 19
(%i13) a*b;
(%o13) 380
(%i14) "=================================================="$
(%i15) c:determinant(C);
(%o15) 380
(%i16) d:determinant(D);
(%o16) 380
(%i17) "=================================================="$
(%i18) " Obwohl das Matrizenprodukt nicht kommutativ      "$
(%i19) " ist, sind die jweiligen Determinanten gleich     "$
(%i20) "=================================================="$
(%i21)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Unabhängigkeit vom Wert des Parameters             "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) A:matrix([1,1,µ], [1,1,1+µ], [1,-1,µ]);
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & \mu+1 \\ 1 & -1 & \mu \end{bmatrix}$$

```
(%i5) determinant(A);
(%o5)  2
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) " Der Wert dieser Determinante ist immer 2           "$
(%i8) "**************************************************"$
(%i9)
```

```
(%i3) matrix([µ-1,0,2], [1,µ-1,1], [-2,0,1-µ]);
```

(%o3) $\begin{bmatrix} \mu - 1 & 0 & 2 \\ 1 & \mu - 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 - \mu \end{bmatrix}$

```
(%i4) determinant(%);
```

(%o4) $(1 - \mu)(\mu - 1)^2 + 4(\mu - 1)$

```
(%i5) allroots(%);
```

(%o5) $[\mu = 0.99999999999999989, \mu = -1.0, \mu = 3.0]$

```
(%i6)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Einheitsmatrix "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) A:matrix([1,2,3], [-4,2,-3], [0,8,-1]);
```

(%o4) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -3 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) B:invert(A);
```

(%o5) $$\begin{bmatrix} -\frac{11}{41} & -\frac{13}{41} & \frac{6}{41} \\ \frac{2}{41} & \frac{1}{82} & \frac{9}{82} \\ \frac{16}{41} & \frac{4}{41} & -\frac{5}{41} \end{bmatrix}$$

```
(%i6) C:A.B;
```

(%o6) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) D:4*A;
```

(%o8) $$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -16 & 8 & -12 \\ 0 & 32 & -4 \end{bmatrix}$$

```
(%i9) E:invert(D);
```

(%o9) $$\begin{bmatrix} -\frac{11}{164} & -\frac{13}{164} & \frac{3}{82} \\ \frac{1}{82} & \frac{1}{328} & \frac{9}{328} \\ \frac{4}{41} & \frac{1}{41} & -\frac{5}{164} \end{bmatrix}$$

```
(%i10) F:D.E;
```

(%o10) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i11) "**"$

(%i12) G:A+4*D;

(%o12) $\begin{bmatrix} 17 & 34 & 51 \\ -68 & 34 & -51 \\ 0 & 136 & -17 \end{bmatrix}$

(%i13) H:invert(G);

(%o13) $\begin{bmatrix} -\frac{11}{697} & -\frac{13}{697} & \frac{6}{697} \\ \frac{2}{697} & \frac{1}{1394} & \frac{9}{1394} \\ \frac{16}{697} & \frac{4}{697} & -\frac{5}{697} \end{bmatrix}$

(%i14) I:G.H;

(%o14) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i15) "**"$

(%i16)

wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.

(%i1) "***"$

(%i2) " Matrizenalgebra "$

(%i3) "***"$

(%i4) A:matrix([1,2,3], [-4,2,-1], [2,-2,5]);

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

(%i5) B:transpose(A);

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

(%i6) C:A+B;

(%o6) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 10 \end{bmatrix}$

(%i7) D:A-B;

(%o7) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ -6 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i8) "***"$

(%i9) E:A.B;

(%o9) $\begin{bmatrix} 14 & -3 & 13 \\ -3 & 21 & -17 \\ 13 & -17 & 33 \end{bmatrix}$

(%i10) F:B.A;

(%o10) $\begin{bmatrix} 21 & -10 & 17 \\ -10 & 12 & -6 \\ 17 & -6 & 35 \end{bmatrix}$

(%i11) G:E-F;

(%o11) $$\begin{bmatrix} -7 & 7 & -4 \\ 7 & 9 & -11 \\ -4 & -11 & -2 \end{bmatrix}$$

(%i12) "**"$

(%i13) H:A.C;

(%o13) $$\begin{bmatrix} 13 & -3 & 29 \\ -17 & 19 & -36 \\ 33 & -27 & 66 \end{bmatrix}$$

(%i14) I:C.A;

(%o14) $$\begin{bmatrix} 20 & -10 & 33 \\ -24 & 10 & -25 \\ 37 & -16 & 68 \end{bmatrix}$$

(%i15) "**"$

(%i16) J:A.D;

(%o16) $$\begin{bmatrix} -15 & 3 & 3 \\ -11 & -23 & -2 \\ 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i17) K:D.A;

(%o17) $$\begin{bmatrix} -22 & 10 & -1 \\ -4 & -14 & -13 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

(%i18)

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Kommutativgesetz gilt nicht bei Matrizenmultiplikation "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) A:matrix([1,1,1], [1,1,1], [1,1,1]);
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) B:matrix([1,1,1], [2,2,2], [3,3,3]);
```

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
(%i6) C:A.B;
```

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

```
(%i7) D:B.A;
```

$$(\%o7)\quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) E:matrix([2,2,2], [3,3,3], [4,4,4]);
```

$$(\%o9)\quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(%i10) F:A.E;
```

$$(\%o10)\quad \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

```
(%i11) G:E.A;
```

(%o11) $\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & 9 \\ 12 & 12 & 12 \end{bmatrix}$

```
(%i13) "****************************************************"$
(%i14)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Mehrstufiger Produktionsprozess                   "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) A:matrix([0,2,0], [0,0,4], [5,1,0]);
```

das ist ein schönes Anwendungsbeispiel

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) B:matrix([2,3], [0,2], [1,5]);
```

$$(\%o5)\quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

```
(%i6) "**************************************************"$
(%i7) " A ist der Zusammenhang zwischen Rohstoffen und    "$
(%i8) " Halbfabrikaten, B ist der Zusammenhang zwischen   "$
(%i9) " Halbfabrikaten und Endprodukt                     "$
(%i10) "**************************************************"$
(%i11) C:A.B;
```

$$(\%o11)\quad \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 20 \\ 10 & 17 \end{bmatrix}$$

```
(%i12) "**************************************************"$
(%i13) " Das ist der Zusammenhang zwischen Rohstoffen und  "$
(%i14) " Endprodukt                                        "$
(%i15) "**************************************************"$
(%i16)
```

```
(%i1) "======================================================"$
(%i2) " Berechnung einer Stromverzweigung                   "$
(%i3) "======================================================"$
(%i5) R1:5;
(%o5) 5
(%i6) R2:10;
(%o6) 10
(%i7) R3:20;
(%o7) 20
(%i8) Uq:70;
(%o8) 70
(%i9) A:matrix([-1,1,-1], [-R1,-R2,0], [0,R2,R3]);
```

(%o9) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -5 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix}$

```
(%i10) b:matrix([0], [-Uq], [Uq]);
```

(%o10) $\begin{bmatrix} 0 \\ -70 \\ 70 \end{bmatrix}$

```
(%i11) x:invert(A).b;
```

(%o11) $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

```
(%i12) I1:4;
(%o12) 4
(%i13) I2:5;
(%o13) 5
(%i14) I3:1;
(%o14) 1
(%i15) "======================================================"$
(%i16) " Das sind die Teilströme                             "$
(%i17) "======================================================"$
(%i18)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Berechnung einer viereckigen Netzmasche            "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) R1:1;
(%o4) 1
(%i5) R2:2;
(%o5) 2
(%i6) R3:5;
(%o6) 5
(%i7) R4:2;
(%o7) 2
(%i8) Uq:19;
(%o8) 19
(%i9) Ia:2;
(%o9) 2
(%i10) Ib:1;
(%o10) 1
(%i11) Ic:1;
(%o11) 1
(%i12) A:matrix([1,1,0,0], [0,1,-1,0], [0,0,1,-1], [-R1,R2,R3,R4]);
```

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i13) b:matrix([Ia], [-Ib], [Ic], [Uq]);
```

(%o13) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 19 \end{bmatrix}$

```
(%i14) x:invert(A).b;
```

(%o14) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{13}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$

```
(%i15) I1:2/5;
```

(%o15) $\frac{2}{5}$

```
(%i16) I2:8/5;
```

(%o16) $\frac{8}{5}$

```
(%i17) I3:13/5;
```

(%o17) $\frac{13}{5}$

```
(%i18) I4:8/5;
```

(%o18) $\frac{8}{5}$

```
(%i19) "*****************************************************"$
(%i20) " Das sind die gesuchten Ströme                        "$
(%i21) "*****************************************************"$
(%i22)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Transponierte Matrix "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) A:matrix([1,2,3], [-4,2,-3], [-2,4,1]);
```

$$(\%o4) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) B:4*A;
```

$$(\%o5) \quad \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -16 & 8 & -12 \\ -8 & 16 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(%i6) C:A+B;
```

$$(\%o6) \quad \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -20 & 10 & -15 \\ -10 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

```
(%i7) D:invert(A);
```

$$(\%o7) \quad \begin{bmatrix} -7 & -5 & 6 \\ -5 & -\frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) E:transpose(A);
```

$$(\%o9) \quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i10) F:transpose(B);
```

$$(\%o10) \quad \begin{bmatrix} 4 & -16 & -8 \\ 8 & 8 & 16 \\ 12 & -12 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(%i11) G:transpose(C);
```

(%o11)
$$\begin{bmatrix} 5 & -20 & -10 \\ 10 & 10 & 20 \\ 15 & -15 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i12) `H:transpose(D);`

(%o12)
$$\begin{bmatrix} -7 & -5 & 6 \\ -5 & -\frac{7}{2} & 4 \\ 6 & \frac{9}{2} & -5 \end{bmatrix}$$

(%i13)

(%i1) A:matrix([1,1,1], [3,-4,2], [-3,4,1]);

(%o1) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i2) B:transpose(A);

(%o2) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i3) C:1/2*(A+B);

(%o3) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i4) D:1/2*(A-B);

(%o4) $$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i5) E:C+D;

(%o5) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i6) "=="$

(%i7) " Beachte die allgemeine Regel, die hinter A=E steht "$

(%i8) "=="$

(%i9)

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) " Erzeugen eines zweidimensionalen Feldes"$
(%i2) "*****************************************************"$
(%i3) h[i,j]:=i-j;
```

(%o3) $h_{i,j} := i - j$

```
(%i4) genmatrix(h,3,3);
```

(%o4) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i5) kill(h);
```

(%o5) DONE

```
(%i6) h[i,j]:=i+j;
```

(%o6) $h_{i,j} := i + j$

```
(%i7) genmatrix(h,3,3);
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

```
(%i8)
```

wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.

(%i1)

" Ein Auto fährt mit 100 km/h und wird durch eine Schnellbremsung mit a = 6 m/s² zum Stillstand gebracht. Wie lange dauert die Schnellbremsung? Wie groß ist der Bremsweg? "$

(%i2) v[0]:100/3.6;

(%o2) 27.77777777777779

ein Beispiel aus der Kinematik

(%i3) a:6;

(%o3) 6

(%i4) v(t):=v[0]-a*t;

(%o4) $v(t) := v_0 - a\ t$

(%i5) integrate(v(t),t);

(%o5) $27.77777777777779\ t - 3\ t^2$

(%i6) s(t):=27.8*t-3*t^2;

(%o6) $s(t) := 27.800000000000001\ t - 3\ t^2$

(%i7) solve(v(t)=0,t);

RAT replaced 27.77777777777778 by 250//9 = 27.77777777777778

(%o7) $[\ t = \frac{125}{27}\ ]$

(%i8) %,numer;

(%o8) [t = 4.629629629629298]

(%i9) s(4.63);

(%o9) 64.40330000000002

(%i10)

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Polynomdivision                                 "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) p1:(0.1*x^3-0.3*x^2+0.5*x-0.7);
```

(%o4) $0.10000000000000001\ x^3 - 0.29999999999999999\ x^2 + 0.5\ x - 0.69999999999999996$

```
(%i5) p2:x-2.18;
```

(%o5) $x - 2.1800000000000002$

```
(%i6) divide(p1,p2);
RAT replaced -0.7 by -7//10 = -0.7
RAT replaced 0.5 by 1//2 = 0.5
RAT replaced -0.3 by -3//10 = -0.3
RAT replaced 0.1 by 1//10 = 0.1
RAT replaced -2.18 by -109//50 = -2.18
```

(%o6) $\left[\frac{2500\ x^2 - 2050\ x + 8031}{25000}, \frac{379}{1250000}\right]$

```
(%i7) %,numer;
```

(%o7) $[\,4.0\ 10^{-5}\left(2500\ x^2 - 2050\ x + 8031\right), 3.032\ 10^{-4}\,]$

```
(%i8) expand(%);
```

(%o8) $[\,0.10000000000000001\ x^2 - 0.082000000000000003\ x + 0.32124000000000003, 3.032\ 10^{-4}\,]$

```
(%i9)
```

(%i1) "==="$

(%i2) " Polynomdivision   "$

(%i3) "==="$

(%i4) p1(x):=(6*x^3+11*x^2+7*x+4);

(%o4) $p1(x) := 6\ x^3 + 11\ x^2 + 7\ x + 4$

(%i5) p2(x):=3*x+4;

(%o5) $p2(x) := 3\ x + 4$

(%i6) divide(p1(x),p2(x));

(%o6) $[\ 2\ x^2 + x + 1\ ,\ 0\ ]$

(%i7) "==="$

(%i8) p1(x):=a^5-1;

(%o8) $p1(x) := a^5 - 1$

(%i9) p2(x):=a-1;

(%o9) $p2(x) := a - 1$

(%i10) divide(p1(x),p2(x));

(%o10) $[\ a^4 + a^3 + a^2 + a + 1\ ,\ 0\ ]$

(%i11) "==="$

(%i12) p1(x):=4*x^4+2*x^2+5;

(%o12) $p1(x) := 4\ x^4 + 2\ x^2 + 5$

(%i13) p2(x):=3*x^2-1;

(%o13) $p2(x) := 3\ x^2 - 1$

(%i14) divide(p1(x),p2(x));

(%o14) $\left[\ \frac{12\ x^2 + 10}{9}\ ,\ \frac{55}{9}\ \right]$

(%i15)

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Regressionsbeispiel                                 "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) x:[10,21,29,40,50];
(%o4)  [ 10 , 21 , 29 , 40 , 50 ]
(%i5) y:2*x-1;
(%o5)  [ 19 , 41 , 57 , 79 , 99 ]
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) " Kontrolle der Daten mittels Regression              "$
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) s:[1,1,1,1,1];
(%o10)  [ 1 , 1 , 1 , 1 , 1 ]
(%i11) load(vect);
(%o11)
C:/Programme/Maxima-5.9.1/share/maxima/5.9.1/share/vector/vect.mac
(%i12) sx:x.s;
(%o12)  150
(%i13) sy:y.s;
(%o13)  295
(%i15) sxy:(x*y).s;
(%o15)  10814
(%i17) sx2:(x^2).s;
(%o17)  5482
(%i18) n:5;
(%o18)  5
(%i19) "*****************************************************"$
(%i20) g1:a*sx2+b*sx=sxy;
(%o20)  150 b + 5482 a = 10814
(%i21) g2:a*sx+b*n=sy;
(%o21)  5 b + 150 a = 295
(%i22) "*****************************************************"$
(%i23) solve([g1,g2],[a,b]);
(%o23)  [ [ a = 2 , b = - 1 ] ]
(%i24) "*****************************************************"$
(%i26) y(x):=2*x+1;
```

Regression ist gut machbar

```
(%i1)  "*****************************************************"$
(%i2)  " Beispiel - Lineare Regression                      "$
(%i3)  "*****************************************************"$
(%i4)  x:[10,32,34,45,53,65];
(%o4)   [ 10 , 32 , 34 , 45 , 53 , 65 ]
(%i5)  y:10*x-28;
(%o5)   [ 72 , 292 , 312 , 422 , 502 , 622 ]
(%i6)  "*****************************************************"$
(%i7)  load(vect);
(%o7)
C:/Programme/Maxima-5.9.1/share/maxima/5.9.1/share/vector/vect.mac
(%i8)  s:[1,1,1,1,1,1];
(%o8)   [ 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 ]
(%i9)  n:6;
(%o9)   6
(%i10)  "*****************************************************"$
(%i11)  sx:x.s;
(%o11)   239
(%i12)  sy:y.s;
(%o12)   2222
(%i13)  sxy:(x*y).s;
(%o13)   106698
(%i14)  sx2:(x^2).s;
(%o14)   11339
(%i15)  "*****************************************************"$
(%i16)  g1:a*sx2+b*sx=sxy;
(%o16)   239 b + 11339 a = 106698
(%i17)  g2:a*sx+b*n=sy;
(%o17)   6 b + 239 a = 2222
(%i18)  "*****************************************************"$
(%i19)  solve([g1,g2],[a,b]);
(%o19)   [ [ a = 10 , b = - 28 ] ]
(%i21)  kill(all);
(%o0)   DONE
(%i1)  y=10*x-28;
(%o1)   y = 10 x - 28
(%i2)  "*****************************************************"$
(%i3)  " Ergebnis                                           "$
```

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Quadratische Regression                             "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4)
a*sum(x[i]^4,i,1,n)+b*sum(x[i]^3,i,1,n)+c*sum(x[i]^2,i,1,n)=sum(x[i]^2*y[
i],i,1,n);
```

(%o4) $$a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) + b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, y_i$$

```
(%i6)
a*sum(x[i]^3,i,1,n)+b*sum(x[i]^2,i,1,n)+c*sum(x[i],i,1,n)=sum(x[i]*y[i],
i,1,n);
```

(%o6) $$a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) + b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

```
(%i7) a*sum(x[i]^2,i,1,n)+b*sum(x[i],i,1,n)+c*n=sum(y[i],i,1,n);
```

(%o7) $$c\, n + a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) " das sind die Regressionsgleichungen                 "$
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) sx:15;
(%o11) 15
(%i12) sy:871.8;
(%o12) 871.7999999999995
(%i13) sx4:979;
(%o13) 979
(%i14) sx3:225;
(%o14) 225
(%i15) sx2:55;
(%o15) 55
(%i16) sx2y:10862.7;
(%o16) 10862.700000000001
(%i17) sxy:2824.9;
(%o17) 2824.9000000000001
(%i18) "*****************************************************"$
```

```
(%i19)  " Diese Summen wurden mit TK errechnet                  "$
(%i20)  "*****************************************************"$
(%i21)  g1:a*sx4+b*sx3+c*sx2=sx2y;
(%o21)   55 c + 225 b + 979 a = 10862.700000000001
(%i22)  g2:a*sx3+b*sx2+c*sx=sxy;
(%o22)   15 c + 55 b + 225 a = 2824.9000000000001
(%i23)  n:5;
(%o23)   5
(%i24)  g3:a*sx2+b*sx+c*n=sy;
(%o24)   5 c + 15 b + 55 a = 871.79999999999995
(%i25)  "*****************************************************"$
(%i26)  solve([g1,g2,g3],[a,b,c]);
RAT replaced -10862.7 by -108627//10 = -10862.7
RAT replaced -2824.9 by -28249//10 = -2824.9
RAT replaced -871.8 by -4359//5 = -871.8
```

$$(\%o26)\quad [\,[\,a = \frac{159}{140}\,,\ b = \frac{1979}{140}\,,\ c = \frac{5973}{50}\,]\,]$$

```
(%i27)  %,numer;
(%o27)   [ [ a = 1.1357142857142857 , b = 14.135714285714286 , c =
119.45999999999999 ] ]
(%i28)  K=1.136*x^2+14.136*x+119.46;
```

$$(\%o28)\quad K = 1.1360000000000001\ x^2 + 14.135999999999999\ x + 119.45999999999999$$

```
(%i29)  "*****************************************************"$
(%i34)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Berechnung der Summen mit Maxima                 "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) "x         y         x^4       x^3       x^2       x^2*y     x*y
         1     134,5       1         1         1       134,5     134,5
         2     152,1      16         8         4       608,4     304,2
         3       174      81        27         9        1566       522
         4     191,8     256        64        16      3068,8     767,2
         5     219,4     625       125        25        5485      1097
        15     871,8     979       225        55     10862,7    2824,9
"$
(%i5) load(vect);
(%o5)
C:/Programme/Maxima-5.9.1/share/maxima/5.9.1/share/vector/vect.mac
(%i6) x:[1,2,3,4,5];
(%o6)  [ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ]
(%i7) y:[134.5,152.1,174,191.8,219.4];
(%o7)  [ 134.5 , 152.09999999999999 , 174 , 191.80000000000001 ,
219.40000000000001 ]
(%i8) s:[1,1,1,1,1];
(%o8)  [ 1 , 1 , 1 , 1 , 1 ]
(%i9) sx:s.x;
(%o9)  15
(%i10) sy:s.y;
(%o10)  871.80000000000007
(%i11) sx4:s.x^4;
(%o11)  979
(%i12) sx3:s.x^3;
(%o12)  225
(%i13) sx2:s.x^2;
(%o13)  55
(%i15) xy:x*y;
(%o15)  [ 134.5 , 304.19999999999999 , 522 , 767.20000000000005 , 1097.0 ]
(%i18) sxy:s.xy;
(%o18)  2824.9000000000001
(%i19) x2y:x^2*y;
(%o19)  [ 134.5 , 608.39999999999998 , 1566 , 3068.800000000002 , 5485.0 ]
(%i20) sx2y:s.x2y;
(%o20)  10862.700000000001
(%i21)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Berechnung von Summen "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) sum(i^2,i,1,n);
```

(%o4) $\sum_{i=1}^{n} i^2$

```
(%i5) %,simpsum;
```

(%o5) $\frac{2 n^3 + 3 n^2 + n}{6}$

```
(%i6) "*****************************************************"$
(%i7) sum(i,i,1,n);
```

(%o7) $\sum_{i=1}^{n} i$

```
(%i8) %,simpsum;
```

(%o8) $\frac{n^2 + n}{2}$

```
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) sum(i^3,i,1,n);
```

(%o10) $\sum_{i=1}^{n} i^3$

```
(%i11) %,simpsum;
```

(%o11) $\frac{n^4 + 2 n^3 + n^2}{4}$

```
(%i12) "*****************************************************"$
(%i13)
```

```
(%i1)  "===============================================" $
(%i2)  " Periodische Dezimalzahlen                     " $
(%i3)  " 1/3 = 3/10+3/100+3/1000 ...                   " $
(%i4)  " ? = 9/10 + 9/100 + 9/1000 ...                 " $
(%i5)  "===============================================" $
(%i24) sum(3/10^x,x,1,inf);
```

(%o24) $3\sum_{x=1}^{inf}\frac{1}{10^x}$

```
(%i25) %,simpsum;
```

(%o25) $\frac{1}{3}$

```
(%i26) "===============================================" $
(%i27) sum(9/10^x,x,1,inf);
```

(%o27) $9\sum_{x=1}^{inf}\frac{1}{10^x}$

```
(%i28) %,simpsum;
```

(%o28) 1

```
(%i29) "===============================================" $
(%i30) " Weitere Beispiele                             " $
(%i31) "===============================================" $
(%i32) sum(4/10^x,x,1,inf);
```

(%o32) $4\sum_{x=1}^{inf}\frac{1}{10^x}$

```
(%i33) %,simpsum;
```

(%o33) $\frac{4}{9}$

```
(%i34) "===============================================" $
(%i35) sum(5/10^x,x,1,inf);
```

(%o35) $5\sum_{x=1}^{inf}\frac{1}{10^x}$

```
(%i36) %,simpsum;
```

(%o36) $\frac{5}{9}$

(%i37) "==="$

(%i38) sum(64/100^x,x,1,inf);

(%o38) $$64 \sum_{x = 1}^{inf} \frac{1}{100^{x}}$$

(%i39) %,simpsum;

(%o39) $$\frac{64}{99}$$

(%i40) "==="$

(%i41) sum(543/1000^x,x,1,inf);

(%o41) $$543 \sum_{x = 1}^{inf} \frac{1}{1000^{x}}$$

(%i42) %,simpsum;

(%o42) $$\frac{181}{333}$$

(%i43) "==="$

(%i44)

Berechnung von Summen und Produkten

Berechnen Sie für die Zahlen $x_1 = 5, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 2, y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 3$ und $y_4 = 1$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i, \prod_{i=1}^{4} x_i, \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \text{ und } \prod_{i=1}^{4} x_i y_i.$$

Lösung mit Maxima:

```
(%i1)  x:[5,2,1,2];
(%o1)  [ 5 , 2 , 1 , 2 ]
(%i2)  y:[1,4,3,1];
(%o2)  [ 1 , 4 , 3 , 1 ]
(%i3)  sum(x[i],i,1,4);
(%o3)  10
(%i4)  prod(x[i],i,1,4);
(%o4)  20
(%i5)  sum(x[i]*y[i],i,1,4);
(%o5)  18
(%i6)  prod(x[i]*y[i],i,1,4);
(%o6)  240
(%i7)  "================================================"$
```

Berechnen Sie

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i}, \sum_{i=1}^{10} (i+3) \text{ und } \prod_{i=1}^{10} (6i-2).$$

```
(%i8)  sum(1/i,i,1,10);
        7381
(%o8)   ----
        2520
(%i9)  sum(i+3,i,1,10);
(%o9)  85
(%i10)  prod(6*i-2,i,1,10);
(%o10)  74385581670400
(%i11)  "================================================"$
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Divergente Reihen "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) sum(1/x,x,1,10);
```

(%o4) $\frac{7381}{2520}$

```
(%i5) 1/1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8+1/9+1/10;
```

(%o5) $\frac{7381}{2520}$

```
(%i6) f(n):=sum(1/x,x,1,10*n);
```

(%o6) $f\left(n\right) := SUM\left(\frac{1}{x}, x, 1, 10\ n\right)$

```
(%i7) makelist(f(n),n,1,5);
```

(%o7) $\left[\frac{7381}{2520}, \frac{55835135}{15519504}, \frac{9304682830147}{2329089562800}, \frac{2078178381193813}{485721041551200}, \frac{13943237577224054960759}{3099044504245996706400}\right]$

```
(%i8) %,numer;
(%o8) [ 2.9289682539682538 , 3.5977396571436819 , 3.994987130920391 ,
4.2785430389363759 , 4.4992053383294257 ]
(%i9) sum(1/x,x,1,INF);
```

(%o9) $\sum_{x=1}^{inf} \frac{1}{x}$

```
(%i10) %,simpsum;
(%o10) inf
(%i11)
```

(%i1) "=="$

(%i2) " Berechnung von Summen   "$

(%i3) "=="$

(%i4) 'sum(k^2,k,1,n);

(%o4) $$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

(%i5) %,simpsum;

(%o5) $$\frac{2\ n^3 + 3\ n^2 + n}{6}$$

(%i6) factor(%);

(%o6) $$\frac{n\ (n+1)\ (2\ n+1)}{6}$$

(%i7) "=="$

(%i8) 'sum(k^3,k,1,n);

(%o8) $$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

(%i9) %,simpsum;

(%o9) $$\frac{n^4 + 2\ n^3 + n^2}{4}$$

(%i10) factor(%);

(%o10) $$\frac{n^2\ (n+1)^2}{4}$$

(%i11) "=="$

(%i12) 'sum((2*k-1)^2,k,1,n);

(%o12) $$\sum_{k=1}^{n} (2\ k-1)^2$$

(%i13) %,simpsum;

(%o13) $$\frac{4\ n^3 + 6\ n^2 + 2\ n}{3} - 2\ n^2 - n$$

(%i14) factor(%);

(%o14) $$\frac{n\ (2\ n-1)\ (2\ n+1)}{3}$$

(%i15) "=="$

(%i16) 'sum((2*k-1)^3,k,1,n);

(%o16) $$\sum_{k=1}^{n} (2\,k-1)^3$$

(%i17) `%,simpsum;`

(%o17) $2\,n^4 - n^2$

(%i18) `factor(%);`

(%o18) $n^2\,(2\,n^2-1)$

(%i19) `"==================================================="$`

(%i20) `'sum(k^2*(n-k)^2,k,1,n-1);`

(%o20) $$\sum_{k=1}^{n-1} k^2\,(n-k)^2$$

(%i21) `%,simpsum;`

(%o21) $$\frac{2\,(n-1)^3\,n^2+3\,(n-1)^2\,n^2+(n-1)\,n^2}{6}-\frac{(n-1)^4\,n+2\,(n-1)^3\,n+(n-1)^2\,n}{2}+\frac{-n+6\,(n-1)^5+15\,(n-1)^4+10\,(n-1)^3+1}{30}$$

(%i22) `factor(%);`

(%o22) $$\frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n^2+1)}{30}$$

(%i23) `"==================================================="$`

(%i38) `sum(1/((2*k-1)*(2*k+1)),k,1,10);`

(%o38) $\frac{10}{21}$

(%i39) `sum(1/((2*k-1)*(2*k+1)),k,1,100);`

(%o39) $\frac{100}{201}$

(%i40) `sum(1/((2*k-1)*(2*k+1)),k,1,1000);`

(%o40) $\frac{1000}{2001}$

(%i41) `sum(1/((2*k-1)*(2*k+1)),k,1,10000);`

(%o41) $\frac{10000}{20001}$

(%i42) `sum(1/((2*k-1)*(2*k+1)),k,1,100000);`

(%o42) $\frac{100000}{200001}$

(%i45) `"==================================================="$`

(%i46) `" Der Grenzwert ist 1/2                           "$`

```
(%i47) "=====================================================$
(%i48) sum(1/((3*k-2)*(3*k+1)),k,1,10);
        10
(%o48)  --
        31
(%i49) sum(1/((3*k-2)*(3*k+1)),k,1,100);
        100
(%o49)  ---
        301
(%i50) sum(1/((3*k-2)*(3*k+1)),k,1,1000);
        1000
(%o50)  ----
        3001
(%i51) sum(1/((3*k-2)*(3*k+1)),k,1,10000);
        10000
(%o51)  -----
        30001
(%i52) "=====================================================$
(%i53) " Der Grenzwert ist 1/3                               "$
(%i54) "=====================================================$
(%i55) sum(1/((2*k-1)*(2*k+5)),k,1,10);
        2822
(%o55)  -----
        12075
(%i56) sum(1/((2*k-1)*(2*k+5)),k,1,100);
         423404
(%o56)  -------
        1672923
(%i57) sum(1/((2*k-1)*(2*k+5)),k,1,1000);
        136776680
(%o57)  ---------
        535736401
(%i58) sum(1/((2*k-1)*(2*k+5)),k,1,10000);
         409032900400
(%o58)  -------------
        1600720092003
(%i59) %,numer;
(%o59) 0.25553055930483
(%i60) 23/90,numer;
(%o60) 0.25555555555556
(%i61) sum(1/((2*k-1)*(2*k+5)),k,1,100000);
         408903289004000
(%o61)  ----------------
        1600072000920003
(%i62) sum(1/((2*k-1)*(2*k+5)),k,1,1000000);
        136296776296680000
(%o62)  ------------------
        533335733336400001
(%i63) %,numer;
(%o63) 0.25555530555593
```

```
(%i64) "=================================================="$
(%i65) " Der theoretische Grenzwert ist 23/90          "$
(%i66) "=================================================="$
(%i67)
```

```
(%i1)  "Rekursive Berechnung von Fakultäten"$
(%i2)  x[0]:1;
(%o2)   1
(%i4)  f(n):=x[n+1]:x[n]*(n+1);
```

(%o4) $f(n) := x_{n+1} : x_n (n+1)$

```
(%i5)  "*****************************************************"$
(%i6)  f(0);
(%o6)   1
(%i7)  f(1);
(%o7)   2
(%i8)  f(2);
(%o8)   6
(%i9)  f(3);
(%o9)   24
(%i10)  "*****************************************************"$
(%i11)  " usw.                                                  "$
(%i12)  "*****************************************************"$
(%i13)
```

```
(%i1) "================================================"$
(%i2) " Rekursive Funktion Fakultät                    "$
(%i3) "================================================"$
(%i4) x[0]:1;
(%o4) 1
(%i5) f(n):=x[n]:n*x[n-1];
```

(%o5) $f(n) := x_n : n\ x_{n-1}$

```
(%i6) "================================================"$
(%i8) for i:1 thru 10 do print(f(i));
1
2
6
24
120
720
5040
40320
362880
3628800
(%o8) done
(%i9)
```

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Zinsenrechnung - Listenverarbeitung                "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) K:[1000,2000,3000,4000,5000];      5 Kapitalien
(%o4)  [ 1000 , 2000 , 3000 , 4000 , 5000 ]
(%i5) p:[2,3,4,5,6];                     die zugehörigen Zinssätze
(%o5)  [ 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ]
(%i6) t:[180,360,270,180,90];            die Verzinsungsdauern
(%o6)  [ 180 , 360 , 270 , 180 , 90 ]
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) Z:K*p*t/36000;
(%o8)  [ 10 , 60 , 90 , 100 , 75 ]      die Zinsen mit Listenverarbeitung ermittelt
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) " Wie hoch ist die Zinssumme?                       "$
(%i11) "*****************************************************"$
(%i12) Zinssumme:sum(Z[k],k,1,5);
(%o12)  335                              eine schöne Anwendung der Listenverarbeitung
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14) " Wie hoch ist die eingesetzte Kapitalsumme?        "$
(%i15) "*****************************************************"$
(%i16) Kapitalsumme:sum(K[k],k,1,5);
(%o16)  15000
(%i17) "*****************************************************"$
(%i18) " Wie hoch sind die Endkapitalien?                  "$
(%i19) "*****************************************************"$
(%i20) EK:K+Z;
(%o20)  [ 1010 , 2060 , 3090 , 4100 , 5075 ]
(%i21) "*****************************************************"$
(%i22) " Wie hoch ist die Endkapitalsumme?                 "$
(%i23) "*****************************************************"$
(%i24) Endkapitalsumme:sum(EK[i],i,1,5);
(%o24)  15335                            Verwendung von indizierten
(%i25) Kapitalsumme+Zinssumme;           Variablen
(%o25)  15335
(%i26) "*****************************************************"$
(%i27) " Das ist quasi die Probe                           "$
(%i28) "*****************************************************"$
(%i29)
```

Rekursive Berechnung der Zinseszinsen

Berechne das Endkapital mit Maxima!

Anfangskapital = 1324 €
Zinssatz = 3 Prozent
Laufzeit = 4 Jahre

Aufzinsungsfaktor

Endkapital

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Rekursive Berechnung der Zinseszinsen              "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) K[0]:1324;
(%o4)  1324
(%i5) r:1.03;
(%o5)  1.03
(%i6) f(n):=K[n]:K[n-1]*r;
(%o6)  f(n) := K_n : K_(n - 1) r
(%i7) f(1);
(%o7)  1363.72
(%i8) f(2);
(%o8)  1404.6316000000002
(%i9) f(3);
(%o9)  1446.7705480000002
(%i10) f(4);
(%o10)  1490.1736644400003
(%i11)
```

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Statistische Kennzahlen                            "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) load(vect);
(%o4)
C:/Programme/Maxima-5.9.1/share/maxima/5.9.1/share/vector/vect.mac
(%i5) x:[0,1,2,3,4];
(%o5)  [ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 ]
(%i6) h:3*x+10;
(%o6)  [ 10 , 13 , 16 , 19 , 22 ]
(%i8) s:[1,1,1,1,1];
(%o8)  [ 1 , 1 , 1 , 1 , 1 ]
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) N:h.s;
(%o10)  80
(%i11) p:h/N;
```

(%o11) $\left[\frac{1}{8} , \frac{13}{80} , \frac{1}{5} , \frac{19}{80} , \frac{11}{40} \right]$

```
(%i12) p.s;
(%o12)  1
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14) " Summenprobe                                        "$
(%i15) "*****************************************************"$
(%i16) m:p.x;
```

(%o16) $\frac{19}{8}$

```
(%i17) "*****************************************************"$
(%i18) " Erwartungswert                                     "$
(%i19) "*****************************************************"$
(%i20) v:p.((x-m)^2);
```

(%o20) $\frac{119}{64}$

```
(%i21) "*****************************************************"$
(%i22) " Varianz                                            "$
(%i23) "*****************************************************"$
(%i25) st=sqrt(v);
```

(%o25) $st = \frac{\sqrt{119}}{8}$

```
(%i26) "*****************************************************"$
```

```
(%i27) " Streuung                                           "$
(%i28) "****************************************************"$
(%i29)
```

```
(%i1) "***************************************************"$
(%i2) " Eine einfache statistische Aufgabe                "$
(%i3) "***************************************************"$
(%i4) x:[0,1,2,3,4];
(%o4) [ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 ]
(%i5) h:[30,12,8,3,1];
(%o5) [ 30 , 12 , 8 , 3 , 1 ]
(%i6) N:sum(h[i],i,1,5);
(%o6) 54
(%i7) p:h/N;
```

(%o7) $\left[\frac{5}{9} , \frac{2}{9} , \frac{4}{27} , \frac{1}{18} , \frac{1}{54} \right]$

```
(%i8) "***************************************************"$
(%i10) m:sum(x[i]*p[i],i,1,5);
```

(%o10) $\frac{41}{54}$

```
(%i11) " Das ist der Erwartungswert                       "$
(%i12) "***************************************************"$
(%i13) x1:(x-m)^2;
```

(%o13) $\left[\frac{1681}{2916} , \frac{169}{2916} , \frac{4489}{2916} , \frac{14641}{2916} , \frac{30625}{2916} \right]$

```
(%i15) v:sum(x[i]*p[i],i,1,5);
```

(%o15) $\frac{41}{54}$

```
(%i16) " Das ist die Varianz                              "$
(%i17) "***************************************************"$
(%i18) s:sqrt(v);
```

(%o18) $\frac{\sqrt{41}}{3\sqrt{6}}$

```
(%i19) " Das ist die Streuung                             "$
(%i20) "***************************************************"$
(%i21)
```

```
(%i1) "****************************************************"$
(%i2) " Kennzahlen Schularbeitsergebnis                    "$
(%i3) "****************************************************"$
(%i4) x:[1,2,3,4,5];
(%o4) [1,2,3,4,5]
(%i5) h:[1,3,10,3,1];
(%o5) [1,3,10,3,1]
(%i6) N:sum(h[i],i,1,5);
(%o6) 18
(%i7) "****************************************************"$
(%i8) " 18 haben mitgeschrieben                            "$
(%i9) "****************************************************"$
(%i10) p:h/N;
(%o10) [1/18,1/6,5/9,1/6,1/18]
(%i11) "****************************************************"$
(%i12) " Wahrscheinlichkeitsverteilung                      "$
(%i13) "****************************************************"$
(%i14) m:sum(p[i]*x[i],i,1,5);
(%o14) 3
(%i15) "****************************************************"$
(%i16) " Das der Erwartungswert                             "$
(%i17) "****************************************************"$
(%i18) x1:(x-m)^2;
(%o18) [4,1,0,1,4]
(%i19) "****************************************************"$
(%i20) " Quadratische Abweichung vom Mittelwert             "$
(%i21) "****************************************************"$
(%i22) v:sum(p[i]*x1[i],i,1,5);
(%o22) 7/9
(%i23) "****************************************************"$
(%i24) " Das ist die Varianz                                "$
(%i25) "****************************************************"$
(%i26) s:sqrt(v);
(%o26) sqrt(7)/3
(%i27) "****************************************************"$
(%i30) " Das ist die Streuung                               "$
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Faktorenzerlegung "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) t1:x^2-8*x+15;
(%o4) x^2 - 8 x + 15
(%i5) t2:x^2-8*x+16;
(%o5) x^2 - 8 x + 16
(%i6) t3:x^2-8*x+17;
(%o6) x^2 - 8 x + 17
```

es ist praktisch, Objektbezeichner t1, t2 und t3 für die Terme zu verwenden

```
(%i7) "*****************************************************"$
(%i8) " Das sind die gegebenen Terme "$
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) factor(t1);
(%o10) (x - 5)(x - 3)
(%i11) factor(t2);
(%o11) (x - 4)^2
(%i12) factor(t3);
(%o12) x^2 - 8 x + 17
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14) " Es gibt noch ein die Funktion GFACTOR()"$
(%i15) "*****************************************************"$
(%i16) gfactor(t1);
(%o16) (x - 5)(x - 3)
(%i17) gfactor(t2);
(%o17) (x - 4)^2
(%i18) gfactor(t3);
(%o18) (x - %i - 4)(x + %i - 4)
(%i19) "*****************************************************"$
(%i20) " GFACTOR() lässt auch komplexe Ergebnisse zu "$
(%i21) "*****************************************************"$
(%i22)
```

```
(%i1) "==================================================="$
(%i2) " Binomische Formeln                                 "$
(%i3) "==================================================="$
(%i4) (a+b)^2;
```

(%o4) $(b + a)^2$

```
(%i5) expand(%);
```

(%o5) $b^2 + 2\ a\ b + a^2$

```
(%i6) "==================================================="$
(%i7) (a-b)^2;
```

(%o7) $(a - b)^2$

```
(%i8) expand(%);
```

(%o8) $b^2 - 2\ a\ b + a^2$

```
(%i9) "==================================================="$
(%i10) (a+b)*(a-b);
```

(%o10) $(a - b)\ (b + a)$

```
(%i11) expand(%);
```

(%o11) $a^2 - b^2$

```
(%i12) "==================================================="$
(%i13) (a+b)^3;
```

(%o13) $(b + a)^3$

```
(%i14) expand(%);
```

(%o14) $b^3 + 3\ a\ b^2 + 3\ a^2\ b + a^3$

```
(%i15) "==================================================="$
(%i16) (a-b)^3;
```

(%o16) $(a - b)^3$

```
(%i17) expand(%);
```

(%o17) $- b^3 + 3\ a\ b^2 - 3\ a^2\ b + a^3$

```
(%i18) "==================================================="$
(%i19) a^3+b^3;
```

(%o19) $b^3 + a^3$

```
(%i20) factor(%);
```

(%o20) $(b + a)\ (b^2 - a\ b + a^2)$

```
(%i21) "==================================================="$
(%i22) a^3-b^3;
```

(%o22) $a^3 - b^3$

```
(%i23) factor(%);
```

(%o23) $-(b-a)(b^2+a\,b+a^2)$

(%i24) "=="$

(%i25) (a+b)^4;

(%o25) $(b+a)^4$

(%i26) expand(%);

(%o26) $b^4+4\,a\,b^3+6\,a^2\,b^2+4\,a^3\,b+a^4$

(%i27) "=="$

(%i28) (a-b)^4;

(%o28) $(a-b)^4$

(%i29) expand(%);

(%o29) $b^4-4\,a\,b^3+6\,a^2\,b^2-4\,a^3\,b+a^4$

(%i30) "=="$

(%i31) a^4-b^4;

(%o31) a^4-b^4

(%i32) factor(%);

(%o32) $-(b-a)(b+a)(b^2+a^2)$

(%i33) "=="$

(%i34)

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Multiplikation von Binomem und darausfolgende Gleichungen "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) t1:(x-4);
(%o4)  x - 4
(%i5) t2:(x+4);
(%o5)  x + 4
(%i6) t3:(x^2-1);
(%o6)  x^2 - 1
(%i7) t4:(x^2+1);
(%o7)  x^2 + 1
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) " Das sind die gegebenen Terme "$
(%i10) "*****************************************************"$
(%i11) p1:t1*t2;
(%o11)  (x - 4) (x + 4)
(%i12) expand(%);
(%o12)  x^2 - 16
(%i13) solve(%=0,x);
(%o13)  [ x = - 4 , x = 4 ]
(%i14) "*****************************************************"$
(%i15) p2:t1*t3;
(%o15)  (x - 4) (x^2 - 1)
(%i16) expand(%);
(%o16)  x^3 - 4 x^2 - x + 4
(%i17) solve(%=0,x);
(%o17)  [ x = 4 , x = - 1 , x = 1 ]
(%i18) "*****************************************************"$
(%i19) p3:t1*t4;
(%o19)  (x - 4) (x^2 + 1)
(%i20) expand(%);
```

es werden Terme erzeugt, die ganzzahlige Nullstellen haben müssen

Trigonometrische Funktionswerte besonderer Winkel

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0	0	1	0	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0
π	0	-1	0	$\pm\infty$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0
2π	0	1	0	$\pm\infty$

0 Grad

```
(%i1) alpha:0;
(%o1)  0
(%i2) sin(alpha);
(%o2)  0
(%i3) cos(alpha);
(%o3)  1
(%i4) tan(alpha);
(%o4)  0
(%i5) cot(alpha);
Division by zero in COT function
 -- an error.  Quitting.  To debug this try DEBUGMODE(TRUE);
(%i6)
```

30 Grad

(%i6) alpha:%pi/6;

(%o6) $\frac{\%pi}{6}$

(%i7) sin(alpha);

(%o7) $\frac{1}{2}$

(%i8) cos(alpha);

(%o8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(%i9) tan(alpha);

(%o9) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(%i10) cot(alpha);

(%o10) $\sqrt{3}$

(%i11)

45 Grad

(%i11) alpha:%pi/4;

(%o11) $\frac{\%pi}{4}$

(%i12) sin(alpha);

(%o12) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(%i13) cos(alpha);

(%o13) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(%i14) tan(alpha);

(%o14) 1

(%i15) cot(alpha);

(%o15) 1

(%i16)

60 Grad

(%i16) alpha:%pi/3;

(%o16) $\frac{\%pi}{3}$

(%i17) sin(alpha);

(%o17) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(%i18) cos(alpha);

(%o18) $\frac{1}{2}$

(%i19) tan(alpha);

(%o19) $\sqrt{3}$

(%i20) cot(alpha);

(%o20) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(%i21)

90 Grad

(%i21) alpha:%pi/2;

(%o21) $\frac{\%pi}{2}$

(%i22) sin(alpha);

(%o22) 1

(%i23) cos(alpha);

(%o23) 0

(%i24) tan(alpha);

Division by 0
 -- an error. Quitting. To debug this try DEBUGMODE(TRUE);

(%i25) cot(alpha);

(%o25) 0

(%i26)

180 Grad

```
(%i26) alpha:%pi;
(%o26)  %pi
(%i27) sin(alpha);
(%o27)  0
(%i28) cos(alpha);
(%o28)  - 1
(%i29) tan(alpha);
(%o29)  0
(%i30) cot(alpha);
Division by 0
 -- an error.  Quitting.  To debug this try DEBUGMODE(TRUE);
(%i31)
```

270 Grad

```
(%i31) alpha:3*%pi/2;
```

(%o31) $\frac{3\ \%pi}{2}$

```
(%i32) sin(alpha);
(%o32)  - 1
(%i33) cos(alpha);
(%o33)  0
(%i34) tan(alpha);
Division by 0
 -- an error.  Quitting.  To debug this try DEBUGMODE(TRUE);
(%i35) cot(alpha);
(%o35)  0
(%i36)
```

360 Grad

```
(%i36) alpha:2*%pi;
(%o36)  2 %pi
(%i37) sin(alpha);
(%o37)  0
(%i38) cos(alpha);
(%o38)  1
(%i39) tan(alpha);
(%o39)  0
(%i40) cot(alpha);
Division by 0
 -- an error.  Quitting.  To debug this try DEBUGMODE(TRUE);
(%i41)
```

(%i1) "**"$

(%i2) " Trigonometrische Umformungen   "$

(%i3) "**"$

(%i4) t1:cos(x)*sin(x+y);

(%o4) $\cos(x)\sin(y+x)$

(%i5) trigexpand(t1);

(%o5) $\cos(x)\left(\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)\right)$

(%i6) trigreduce(t1);

(%o6) $\frac{\sin(y+2x)}{2}+\frac{\sin(y)}{2}$

(%i7) trigsimp(t1);

(%o7) $\cos(x)\sin(y+x)$

(%i8) "**"$

(%i9) t2:sin(x+y);

(%o9) $\sin(y+x)$

(%i10) trigexpand(t2);

(%o10) $\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)$

(%i11) trigreduce(t2);

(%o11) $\sin(y+x)$

(%i12) trigsimp(t2);

(%o12) $\sin(y+x)$

(%i13) "**"$

(%i14) t3:sin(x+y)*cos(x+y);

(%o14) $\cos(y+x)\sin(y+x)$

(%i15) trigexpand(t3);

(%o15) $\left(\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)\right)\left(\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\right)$

(%i16) trigreduce(t3);

(%o16) $\frac{\sin(2y+2x)}{2}$

(%i17) trigsimp(t3);

(%o17) $\cos(y+x)\sin(y+x)$

(%i18) "**"$

(%i19) t4:(sin(x))^2+(cos(x))^2;

(%o19) $\sin(x)^2+\cos(x)^2$

(%i20) trigexpand(t4);

(%o20) $\sin(x)^2+\cos(x)^2$

(%i21) trigreduce(t4);

(%o21) $\dfrac{\cos(2\,x)+1}{2}+\dfrac{1-\cos(2\,x)}{2}$

```
(%i22) trigsimp(t4);
(%o22) 1
(%i23) "****************************************************"$
(%i24)
```

wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Trigonometrische Umformungen                       "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) a:cos(x)*sin(x+y);
```

(%o4) $\cos(x)\,\sin(y+x)$

```
(%i5) trigexpand(a);
```

(%o5) $\cos(x)\,(\cos(x)\,\sin(y)+\sin(x)\,\cos(y))$

```
(%i6) trigreduce(%);
```

(%o6) $\cos(x)\,\sin(y+x)$

```
(%i7) trigreduce(a);
```

(%o7) $\dfrac{\sin(y+2\,x)}{2}+\dfrac{\sin(y)}{2}$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) b:sin(x)*cos(x+y);
```

(%o9) $\sin(x)\,\cos(y+x)$

```
(%i10) trigexpand(b);
```

(%o10) $\sin(x)\,(\cos(x)\,\cos(y)-\sin(x)\,\sin(y))$

```
(%i11) trigreduce(%);
```

(%o11) $\sin(x)\,\cos(y+x)$

```
(%i12) trigreduce(%);
```

(%o12) $\dfrac{\sin(y+2\,x)}{2}-\dfrac{\sin(y)}{2}$

```
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14) c:sin(x)^2+cos(x)^2;
```

(%o14) $\sin(x)^2+\cos(x)^2$

```
(%i15) trigexpand(c);
```

(%o15) $\sin(x)^2+\cos(x)^2$

```
(%i16) trigreduce(%);
```

(%o16) $\dfrac{\cos(2\,x)+1}{2}+\dfrac{1-\cos(2\,x)}{2}$

```
(%i17) trigreduce(c);
```

```
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Trigonometrische Umformungen                       "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) t1:cos(x)*sin(x+y);
```

(%o4) $\cos(x)\sin(y+x)$

```
(%i5) trigexpand(t1);
```

(%o5) $\cos(x)\left(\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)\right)$

```
(%i6) trigreduce(t1);
```

(%o6) $\frac{\sin(y+2x)}{2}+\frac{\sin(y)}{2}$

```
(%i7) trigsimp(t1);
```

(%o7) $\cos(x)\sin(y+x)$

```
(%i8) "*****************************************************"$
(%i9) t2:sin(x+y);
```

(%o9) $\sin(y+x)$

```
(%i10) trigexpand(t2);
```

(%o10) $\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)$

```
(%i11) trigreduce(t2);
```

(%o11) $\sin(y+x)$

```
(%i12) trigsimp(t2);
```

(%o12) $\sin(y+x)$

```
(%i13) "*****************************************************"$
(%i14) t3:sin(x+y)*cos(x+y);
```

(%o14) $\cos(y+x)\sin(y+x)$

```
(%i15) trigexpand(t3);
```

(%o15) $\left(\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)\right)\left(\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\right)$

```
(%i16) trigreduce(t3);
```

(%o16) $\frac{\sin(2y+2x)}{2}$

```
(%i17) trigsimp(t3);
```

(%o17) $\cos(y+x)\sin(y+x)$

```
(%i18) "*****************************************************"$
(%i19) t4:(sin(x))^2+(cos(x))^2;
```

(%o19) $\sin(x)^2+\cos(x)^2$

```
(%i20) trigexpand(t4);
```

(%o20) $\sin(x)^2+\cos(x)^2$

```
(%i21) trigreduce(t4);
```

(%o17) $\frac{\cos(2\,x)+1}{2}+\frac{1-\cos(2\,x)}{2}$

(%i18) expand(%);

(%o18) 1

(%i19) "**"$

(%i20)

```
(%i1) "==========================================================="$
(%i2) " Eine inverse Matrix in der Trigonometrie                  "$
(%i3) "==========================================================="$
(%i4) A:matrix([sin(μ),-cos(μ),0], [cos(μ),sin(μ),0], [0,0,1]);
```

(%o4)
$$\begin{bmatrix} \sin(\mu) & -\cos(\mu) & 0 \\ \cos(\mu) & \sin(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i7) INV:invert(A);
```

(%o7)
$$\begin{bmatrix} \frac{\sin(\mu)}{\sin(\mu)^2+\cos(\mu)^2} & \frac{\cos(\mu)}{\sin(\mu)^2+\cos(\mu)^2} & 0 \\ -\frac{\cos(\mu)}{\sin(\mu)^2+\cos(\mu)^2} & \frac{\sin(\mu)}{\sin(\mu)^2+\cos(\mu)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i8) trigreduce(INV);
```

(%o8)
$$\begin{bmatrix} \sin(\mu) & \cos(\mu) & 0 \\ -\cos(\mu) & \sin(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i9) trans:transpose(A);
```

(%o9)
$$\begin{bmatrix} \sin(\mu) & \cos(\mu) & 0 \\ -\cos(\mu) & \sin(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i13) B:A.trans;
```

(%o13)
$$\begin{bmatrix} \sin(\mu)^2+\cos(\mu)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\mu)^2+\cos(\mu)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i14) trigsimp(B);
```

(%o14)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i15) "==========================================================="$
(%i16) " Matrizen mit dieser Eigenschaft heissen orthogonal "$
(%i17) "==========================================================="$
(%i18)
```

```
(%i1) "================================================"$
(%i2) " Bestimmung des charakteristischen Polynoms    "$
(%i3) " det(A-µ.E)                                    "$
(%i4) "================================================"$
(%i5) A:matrix([1,3], [4,2]);
```

(%o5) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i6) E:matrix([1,0], [0,1]);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i7) A;
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i8) charpoly(%, x), expand;
```

(%o8) $x^2 - 3\,x - 10$

```
(%i10) B:A-µ*E;
```

(%o10) $\begin{bmatrix} 1-\mu & 3 \\ 4 & 2-\mu \end{bmatrix}$

```
(%i11) determinant(%);
```

(%o11) $(1-\mu)(2-\mu) - 12$

```
(%i12) expand(%);
```

(%o12) $\mu^2 - 3\,\mu - 10$

```
(%i13) "================================================"$
(%i14) A:matrix([0.8,0.1], [0.2,0.9]);
```

(%o14) $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$

```
(%i15) charpoly(A, µ), expand;
```

(%o15) $\mu^2 - 1.7\,\mu + 0.7$

```
(%i16) B:A-µ*E;
```

(%o16) $\begin{bmatrix} 0.8-\mu & 0.1 \\ 0.2 & 0.9-\mu \end{bmatrix}$

```
(%i17) determinant(B);
```

(%o17) $(0.8-\mu)(0.9-\mu) - 0.02$

```
(%i18) expand(%);
```

(%o18) $\mu^2 - 1.7\,\mu + 0.7$

```
(%i19) "================================================"$
```

(%i20) `A:matrix([1,2,3], [-4,8,2], [5,-3,4]);`

(%o20)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 8 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(%i22) `charpoly(A, μ), expand;`

(%o22) $-\mu^3 + 13\mu^2 - 43\mu + 6$

(%i24) `E:matrix([1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]);`

(%o24)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i25) `B:A-μ*E;`

(%o25)
$$\begin{bmatrix} 1-\mu & 2 & 3 \\ -4 & 8-\mu & 2 \\ 5 & -3 & 4-\mu \end{bmatrix}$$

(%i26) `determinant(B);`

(%o26) $((4-\mu)(8-\mu)+6)(1-\mu)+3(12-5(8-\mu))-2(-4(4-\mu)-10)$

(%i27) `expand(%);`

(%o27) $-\mu^3 + 13\mu^2 - 43\mu + 6$

(%i28)

```
(%i1) A:matrix([1,3], [4,2]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

```
(%i2) charpoly(%, x), expand;
```

(%o2) $x^2 - 3\,x - 10$

```
(%i3) solve(%,x);
```

(%o3) $[\, x = -2 \,,\; x = 5 \,]$

```
(%i4) "=================================================="$
(%i5) " das sind die Eigenwerte von A                      "$
(%i6) "=================================================="$
(%i7) B:A.A;
```

(%o7) $\begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$

```
(%i8) charpoly(%, x), expand;
```

(%o8) $x^2 - 29\,x + 100$

```
(%i9) solve(%,x);
```

(%o9) $[\, x = 25 \,,\; x = 4 \,]$

```
(%i10) "=================================================="$
(%i11) " das sind die Eigenwerte von A²                     "$
(%i12) "=================================================="$
(%i13) C:A.B;
```

(%o13) $\begin{bmatrix} 49 & 57 \\ 76 & 68 \end{bmatrix}$

```
(%i14) D:B.A;
```

(%o14) $\begin{bmatrix} 49 & 57 \\ 76 & 68 \end{bmatrix}$

```
(%i15) charpoly(%, x), expand;
```

(%o15) $x^2 - 117\,x - 1000$

```
(%i16) solve(%,x);
```

(%o16) $[\, x = -8 \,,\; x = 125 \,]$

```
(%i17) "=================================================="$
(%i18) " das sind die Eigenwerte von A³                     "$
(%i19) "=================================================="$
(%i20)
```

Matrizengleichungen

Beispiel 1

$$\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -11 & -5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 42 & -91 \\ 129 & -42 \end{bmatrix}$$

Lösung

(%i1) `A:matrix([-8,5], [-11,-5]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -11 & -5 \end{bmatrix}$

(%i2) `B:matrix([42,-91], [129,-42]);`

(%o2) $\begin{bmatrix} 42 & -91 \\ 129 & -42 \end{bmatrix}$

(%i7) `C:invert(A).B;`

(%o7) $\begin{bmatrix} -9 & 7 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$

Beispiel 2

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 96 & 114 & 52 \\ -138 & -133 & -108 \end{bmatrix}$$

Lösung

(%i1) `A:matrix([4,-6], [-1,11]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$

(%i2) `B:matrix([96,114,52], [-138,-133,-108]);`

(%o2) $\begin{bmatrix} 96 & 114 & 52 \\ -138 & -133 & -108 \end{bmatrix}$

(%i3) `C:invert(A).B;`

(%o3) $\begin{bmatrix} 6 & 12 & -2 \\ -12 & -11 & -10 \end{bmatrix}$

Cramersche Regel

Beispiel 1

$$-1x - 6y = -73$$
$$-9x - 4y = 43$$

Lösung

```
(%i1)  M:matrix([-1,-6], [-9,-4]);
```

$$(\%o1)\quad \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ -9 & -4 \end{bmatrix}$$

```
(%i2)  Mx:matrix([-73,-6], [43,-4]);
```

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix} -73 & -6 \\ 43 & -4 \end{bmatrix}$$

```
(%i3)  My:matrix([-1,-73], [-9,43]);
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} -1 & -73 \\ -9 & 43 \end{bmatrix}$$

```
(%i5)  det:determinant(M);
(%o5)  - 50
(%i6)  detx:determinant(Mx);
(%o6)  550
(%i7)  dety:determinant(My);
(%o7)  - 700
(%i10)  x:detx/det;
(%o10)  - 11
(%i11)  y:dety/det;
(%o11)  14
(%i12)  "================================================"$
(%i13)  " x = -11 und y = 14                             "$
(%i14)  "================================================"$
```

Beispiel 2

$$-2x + 8y = 60$$
$$5x - 9y = -73$$

Lösung

(%i1) `M:matrix([-2,8], [5,-9]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$

(%i2) `Mx:matrix([60,8], [-73,-9]);`

(%o2) $\begin{bmatrix} 60 & 8 \\ -73 & -9 \end{bmatrix}$

(%i3) `My:matrix([-2,60], [5,-73]);`

(%o3) $\begin{bmatrix} -2 & 60 \\ 5 & -73 \end{bmatrix}$

(%i4) `"==============================================="$`

(%i5) `x:determinant(Mx)/determinant(M);`

(%o5) -2

(%i6) `y:determinant(My)/determinant(M);`

(%o6) 7

(%i7) `"==============================================="$`

Beispiel 3

$-6x - 2y + 3z = 60$
$-1x + 7y - 4z = -114$
$5x + 7y + 6z = -46$

Lösung

(%i1) `M:matrix([-6,-2,+3], [-1,7,-4], [5,7,6]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} -6 & -2 & 3 \\ -1 & 7 & -4 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

(%i3) `My:matrix([-6,60,3], [-1,-114,-4], [5,-46,6]);`

(%o3) $\begin{bmatrix} -6 & 60 & 3 \\ -1 & -114 & -4 \\ 5 & -46 & 6 \end{bmatrix}$

(%i4) `Mz:matrix([-6,-2,60], [-1,7,-114], [5,7,-46]);`

(%o4) $\begin{bmatrix} -6 & -2 & 60 \\ -1 & 7 & -114 \\ 5 & 7 & -46 \end{bmatrix}$

(%i6) `Mx:matrix([60,-2,3], [-114,7,-4], [-46,7,6]);`

(%o6) $\begin{bmatrix} 60 & -2 & 3 \\ -114 & 7 & -4 \\ -46 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

(%i7) `x:determinant(Mx)/determinant(M);`

(%o7) -2

(%i8) `y:determinant(My)/determinant(M);`

(%o8) -12

(%i9) `z:determinant(Mz)/determinant(M);`

(%o9) 8

(%i1) Punkt:matrix([3], [4]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(%i2) winkel:%pi/2;

(%o2) $\frac{\%pi}{2}$

(%i7)

A(alpha):=matrix([cos(alpha),-sin(alpha)], [sin(alpha),cos(alpha)]);

(%o7) $A(alpha) := \begin{bmatrix} cos(alpha) & -sin(alpha) \\ sin(alpha) & cos(alpha) \end{bmatrix}$

(%i8) transpose(Punkt).A(winkel);

(%o8) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}$

(%i9) "=="$

(%i10) " Das ist eine Drehung um 90°   "$

(%i11) "=="$

(%i12) transpose(Punkt).A(-winkel);

(%o12) $\begin{bmatrix} -4 & 3 \end{bmatrix}$

(%i13) "=="$

(%i15) " Drehung in die andere Richtung   "$

(%i16) "=="$

(%i17)

Die Vektorrechung ist auch in der Wirtschaftsmathematik nützlich

```
// Package Vektorrechnung aufrufen
// Erwartungswert mit Skalarprodukt berechnen
// ==========================================

(%i1) load(vect);
(%o1) C:/Programme/Maxima-5.9.0/share/maxima/5.9.1/share/vector/vect.mac

// x = Anzahl der Verkehrsunfälle pro Woche
// ========================================

(%i2) x:[0,1,2,3,4];
(%o2)                          [0, 1, 2, 3, 4]

// h = Häufigkeitsverteilung (absolut)
// ===================================

(%i3) h:[30,12,8,0,2];
(%o3)                         [30, 12, 8, 0, 2]

// summierender Vektor
// ===================

(%i4) s:[1,1,1,1,1];
(%o4)                          [1, 1, 1, 1, 1]

// Summe der Häufigkeiten
// ======================

(%i5) N:h.s;
(%o5)                                52

// p = relative Häufigkeiten (Wahrscheinlichkeiten)
// ================================================

(%i6) p:h/N;
                               15  3   2       1
(%o6)                         [--, --, --, 0, --]
                               26  13  13      26

// Berechnung des Erwartungswerts
// ==============================

(%i8) E:p.x;
                                     9
(%o8)                                --
                                     13
(%i9)
```

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Binomialverteilung "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) c(n,k):=n!/k!/(n-k)!;
```

(%o4) $c(n, k) := \dfrac{\frac{n!}{k!}}{(n-k)!}$

es geht auch

binom(n,k)

oder

binomial(n,k)

```
(%i5) "*****************************************************"$
(%i8) " benutzerdefinierte Binomialkoeffizienten "$
(%i9) "*****************************************************"$
(%i10) B(n,k,p):=c(n,k)*p^k*(1-p)^(n-k);
```

(%o10) $B(n, k, p) := c(n, k)\, p^k (1-p)^{n-k}$

```
(%i11) n:4;
(%o11) 4
(%i12) p:1/6;
```

(%o12) $\frac{1}{6}$

```
(%i13) makelist(B(n,k,p),k,0,n);
```

(%o13) $\left[\frac{625}{1296}, \frac{125}{324}, \frac{25}{216}, \frac{5}{324}, \frac{1}{1296}\right]$

```
(%i14) "*****************************************************"$
(%i15) " Das ist die Binomialverteilung "$
(%i16) "*****************************************************"$
(%i17) sum(B(n,k,p),k,0,n);
(%o17) 1
(%i18) "*****************************************************"$
(%i19) " Die Summenprobe ergibt 1 "$
(%i20) "*****************************************************"$
(%i21)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Zufallsgenerator                                 "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) makelist(random(i)+1,i,1,6);
(%o4)  [ 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 ]
(%i5) makelist(random(i)+1,i,1,6);
(%o5)  [ 1 , 1 , 3 , 1 , 4 , 3 ]
(%i6) makelist(random(i)+1,i,1,6);
(%o6)  [ 1 , 1 , 2 , 4 , 3 , 5 ]
(%i7) makelist(random(i)+1,i,1,6);
(%o7)  [ 1 , 2 , 1 , 2 , 4 , 6 ]
(%i8) makelist(random(i)+1,i,1,6);
(%o8)  [ 1 , 2 , 1 , 4 , 4 , 2 ]
(%i9) makelist(random(i)+1,i,1,6);
(%o9)  [ 1 , 2 , 3 , 4 , 1 , 5 ]
(%i10) makelist(random(i)+1,i,1,6);
(%o10)  [ 1 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ]
(%i11) makelist(random(i)+1,i,1,6);
(%o11)  [ 1 , 2 , 2 , 3 , 3 , 2 ]
(%i12) "**************************************************"$
(%i13) " Simulation 6-mal würfeln                         "$
(%i14) "**************************************************"$
(%i15)
```

Wir simulieren mehrmals 6 Ergebnisse eines Würfelexperiments

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) "*****************************************************"$
(%i2) " Zweidimensionale Felder                             "$
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) h[i,j]:=i+j;
```

Zweidimensionale Felder sind in der Softwareerstellung insbesondere im Bereich der Wirtschaftsinformatik nützlich.

(%o4) $h_{i,j} := i + j$

(%i5) `g[i,j]:=i-j;`

(%o5) $g_{i,j} := i - j$

(%i6) `f[i,j]:=i*j;`

(%o6) $f_{i,j} := i\ j$

(%i7) `e[i,j]:=i/j;`

(%o7) $e_{i,j} := \frac{i}{j}$

(%i8) `"*****************************************************"$`

(%i9) `A:genmatrix(h,3,3);`

(%o9) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(%i10) `B:genmatrix(g,3,3);`

(%o10) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i11) `C:genmatrix(f,3,3);`

(%o11) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

(%i12) `D:genmatrix(e,3,3);`

(%o12) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Listen von Fakultäten                             "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) f(n):=makelist(i!,i,0,n);
(%o4)  f(n) := MAKELIST(i ! , i , 0 , n)
(%i5) "**************************************************"$
(%i6) for n:0 thru 7 do display(n,f(n));
n = 0 f(0) = [ 1 ]
n = 1 f(1) = [ 1 , 1 ]
n = 2 f(2) = [ 1 , 1 , 2 ]
n = 3 f(3) = [ 1 , 1 , 2 , 6 ]
n = 4 f(4) = [ 1 , 1 , 2 , 6 , 24 ]
n = 5 f(5) = [ 1 , 1 , 2 , 6 , 24 , 120 ]
n = 6 f(6) = [ 1 , 1 , 2 , 6 , 24 , 120 , 720 ]
n = 7 f(7) = [ 1 , 1 , 2 , 6 , 24 , 120 , 720 , 5040 ]
(%o6)  DONE
(%i7)
```

```
(%i1)  "**************************************************"$
(%i2)  " Pascaldreieck                                    "$
(%i3)  "**************************************************"$
(%i4)  display2d:false;
```

das schaltet die zweidimensionale Anzeige aus

```
(%o4) FALSE
(%i5)  c(n,k):=n!/(k!*(n-k)!);
(%o5) c(n,k):=n!/(k!*(n-k)!)
(%i6)  display2d:true;
```

das schaltet die zweidimensionale Anzeige wieder ein
(das ist sinnvollerweise der Standardwert)

```
(%o6)  true
(%i7)  c(n,k);
```

(%o7) $\dfrac{n\,!}{k\,!\,(n - k)\,!}$

```
(%i8)  "**************************************************"$
(%i9)  display2d:false;
(%o9) FALSE
(%i10)  for n:0 thru 5 do for k:0 thru n do disp(c(n,k));
1
1
1
1
2   für n=2
1
1
3
3
1
1
4
6   für n=4
4
1
1
5
10
10
5
1
(%o10) DONE
(%i11)  for n:0 thru 5 do for k:0 thru n do display(c(n,k));
c(0,0) = 1
c(1,0) = 1
c(1,1) = 1
c(2,0) = 1
```

```
c(2,1) = 2
c(2,2) = 1
c(3,0) = 1
c(3,1) = 3
c(3,2) = 3
c(3,3) = 1
c(4,0) = 1
c(4,1) = 4
c(4,2) = 6
c(4,3) = 4
c(4,4) = 1
c(5,0) = 1
c(5,1) = 5
c(5,2) = 10
c(5,3) = 10
c(5,4) = 5
c(5,5) = 1
(%o11) DONE
(%i12)
```

Das ist die Zeile für n=5

Diese Übungen wurden im Rahmen eines MNI-Projektes an der Bundeshandelsakademie und Bundeshandelsschule Tamsweg für den Gebrauch mit der Lernplattform Classserver von Microsoft erstellt.

Die verwendete Software stammt von:

http://maxima.sourceforge.net mit Zusatz
http://wxmaxima.sourceforge.net

Dokumentiert sind diese Beispiele auf

http://www.hit4u.at/maxima

Kontrolliere die rechtwinkeligen Dreiecke

```
(%i1) for a:1 thru 100 do
       for b:a thru 100 do
          for c:b thru 100 do
             if c**2=a**2+b**2 then print(a,b,c)$
3  4  5
5  12  13
6  8  10
7  24  25
8  15  17
9  12  15
9  40  41
10  24  26
```

(das ist nur ein Teil der Ergebnisse)

Dreieck 1

Gegeben :

Kathete a = 3
Kathete b = 4

Ergebnisse :

Hypotenuse c = 5

Dreieck 2

Gegeben :

Kathete a = 5
Kathete b = 12

Ergebnisse :

Hypotenuse c = 13

Dreieck 3

Gegeben :

Kathete a = 6
Kathete b = 8

Ergebnisse :

Hypotenuse c = 10

Dreieck 4

Gegeben :

Kathete a = 7
Kathete b = 24

Ergebnisse :

Hypotenuse c = 25

Dreieck 5

Gegeben :

Kathete a = 8
Kathete b = 15

Ergebnisse :

Hypotenuse c = 17

Dreieck 6

Gegeben :

Kathete a = 9
Kathete b = 12

Ergebnisse :

Hypotenuse c = 15

Dreieck 7

Gegeben :

Kathete a = 9
Kathete b = 40

Ergebnisse :

Hypotenuse c = 41

Dreieck 8

Gegeben :

Kathete a = 10
Kathete b = 24

Ergebnisse :

Hypotenuse c = 26

Analysis: Differentialgleichung

(%i1) `'diff(y(x),x)-2/x*y(x)=x^2/(1+x^2);`

(%o1) $$\frac{d}{d\,x}\,y(x) - \frac{2\,y(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2+1}$$

(%i2) `ode2(%,y(x),x);`

(%o2) $$y(x) = x^2\,\left(\mathrm{atan}(x) + \%C\right)$$

(%i3)

Man hat üblichweise kaum Möglichkeiten, Differentialgleichungen im Unterricht der Sekundarstufe II zu behandeln. Maxima würde hier einiges ermöglichen.

(%i1) `'diff(y(x),x)+x/(x^2-1)*y(x)=1/(1-x^2);`

(%o1) $$\frac{d}{d\,x}\,y(x)+\frac{x\,y(x)}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}$$

(%i2) `ode2(%,y(x),x);`

(%o2) $$y(x)=\%e^{-\frac{\log\left(x^2-1\right)}{2}}\left(\%C-\log\left(2\,\sqrt{x^2-1}+2\,x\right)\right)$$

(%i3)

Differentialgleichungen werden in der Sekundarstufe II nur selten verwendet

(%i1) `'diff(y(x),x)+x*y(x)=x^3;`

(%o1) $$\frac{d}{d\,x}\,y(x) + x\,y(x) = x^3$$

(%i2) `ode2(%,y(x),x);`

(%o2) $$y(x) = \%e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{\left(2\,x^2-4\right)\,\%e^{\frac{x^2}{2}}}{2} + \%C\right)$$

(%i3) `ratsimp(%);`

(%o3) $$y(x) = \%e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\left(x^2-2\right)\,\%e^{\frac{x^2}{2}} + \%C\right)$$

(%i4) `expand(%);`

(%o4) $$y(x) = \%C\,\%e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$$

(%i5)

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
```

(%i1) 'diff(y(x),x)=y(x);

Die Lösung dieser sehr bekannten Differentialgleichung ist die Exponentialfunktion mit der Basis e (e ist die Eulersche Zahl).

(%o1) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) = y(x)$

Die Funktion exp(x) bleibt beim Differenzieren und beim Integrieren unverändert

(%i2) ode2(%,y(x),x);

(%o2) $y(x) = \%C\ \%e^{x}$

(%i3)

```
(%i1) a*'diff(x(t),t,2)+b*diff(x(t),t)+c*x(t)=0;
```

(%o1) $$a\left(\frac{d^2}{d\,t^2}x(t)\right)+b\left(\frac{d}{d\,t}x(t)\right)+c\,x(t)=0$$

```
(%i2) ode2(%,x(t),t);
```

Is $4\,a\,c-b^2$ *positive, negative, or zero?* positive;

(%o2) $$x(t)=\%e^{-\frac{b\,t}{2\,a}}\left(\%K1\,\sin\left(\frac{\sqrt{\frac{4\,c}{a}-\frac{b^2}{a^2}}\,t}{2}\right)+\%K2\,\cos\left(\frac{\sqrt{\frac{4\,c}{a}-\frac{b^2}{a^2}}\,t}{2}\right)\right)$$

```
(%i3) "*****************************************************"$
(%i4) " Gedämpfte harmonische Schwingung                    "$
(%i5) "*****************************************************"$
(%i6)
```

Die erste Ableitung von x(t) ist die Geschwindigkeit, die zweite Ableitung nennt man Beschleunigung.

Für b = 0 erhält man eine ungedämpfte harmonische Schwingung.

```
wxMaxima 0.6.4 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.9.1 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp Kyoto Common Lisp GCL 2.6.5 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1) 'diff(y(x),x)=(y(x)^2-x^2)/(2*x*y(x));
```

(%o1) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) = \frac{y(x)^2 - x^2}{2\,x\,y(x)}$

```
(%i2) ode2(%,y(x),x);
```

(%o2) $-\frac{x}{y(x)^2 + x^2} = \%C$

```
(%i3) solve(%,y(x));
```

(%o3) $[\,y(x) = -\sqrt{-x^2 - \frac{x}{\%C}}\,,\; y(x) = \sqrt{-x^2 - \frac{x}{\%C}}\,]$

```
(%i4) "**************************************************"$
(%i5) 'diff(y(x),x)=(2*x^2+y(x)^2)/(3*x*y(x));
```

(%o5) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) = \frac{y(x)^2 + 2\,x^2}{3\,x\,y(x)}$

```
(%i6) ode2(%,y(x),x);
```

(%o6) $\frac{3\,y(x)^2 - 3\,x^2}{2\,x^{2/3}} = \%C$

```
(%i7) solve(%,y(x));
```

(%o7) $[\,y(x) = -\frac{\sqrt{3\,x^2 + 2\,\%C\,x^{2/3}}}{\sqrt{3}}\,,\; y(x) = \frac{\sqrt{3\,x^2 + 2\,\%C\,x^{2/3}}}{\sqrt{3}}\,]$

```
(%i8) "**************************************************"$
(%i9) 'diff(y(x),x)=y(x);
```

(%o9) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) = y(x)$

das ist die bekannte Differentialgleichung der Exponentialfunktion mit der Basis e (Eulersche Zahl)

```
(%i10) ode2(%,y(x),x);
```

(%o10) $y(x) = \%C\;\%e^{x}$

```
(%i11) "**************************************************"$
(%i12) 'diff(y(x),x,2)=y(x);
```

(%o12) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y(x) = y(x)$

```
(%i13) ode2(%,y(x),x);
```

(%o13) $y(x) = \%K1\;\%e^{x} + \%K2\;\%e^{-x}$

```
(%i14) "**************************************************"$
```

```
(%i15) 'diff(y(x),x,2)=-y(x);
```

(%o15) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y(x) = -\,y(x)$$

Das Hookesche Gesetz hat als Lösung eine ungedämpfte harmonische Schwingung.

```
(%i16) ode2(%,y(x),x);
```

(%o16) $$y(x) = \%K1\,\sin(x) + \%K2\,\cos(x)$$

```
(%i17) "*****************************************************"$
(%i18)
```

(%i4) 'diff(y(x),x)-y(x)^2*x^2=0;

(%o4) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) - x^2\,y(x)^2 = 0$

(%i5) ode2(%,y(x),x);

(%o5) $-\frac{1}{y(x)} = \frac{x^3}{3} + \%C$

(%i6) solve(%,y(x));

(%o6) $[\,y(x) = -\frac{3}{x^3 + 3\,\%C}\,]$

(%i7) "**"$

(%i8) " Lösung Beispiel 1   "$

(%i9) "**"$

(%i12) 'x*diff(y(x),x)-cos(y(x))^2=0;

(%o12) $x\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right) - \cos\left(y(x)\right)^2 = 0$

(%i13) ode2(%,y(x),x);

(%o13) $\tan\left(y(x)\right) = \log(x) + \%C$

(%i14) solve(%,y(x));

SOLVE is using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.

(%o14) $[\,y(x) = \operatorname{atan}\left(\log(x) + \%C\right)\,]$

(%i15) "**"$

(%i16) " Lösung Beispiel 2   "$

(%i17) "**"$

(%i20) 'diff(y(x),x)-exp(x-y(x))*x=0;

(%o20) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) - x\,\%e^{x - y(x)} = 0$

(%i21) ode2(%,y(x),x);

(%o21) $\%e^{y(x)} + (1 - x)\,\%e^x = \%C$

(%i22) solve(%,y(x));

(%o22) $[\,y(x) = \log\left(x\,\%e^x - \%e^x + \%C\right)\,]$

(%i23) "**"$

(%i24) " Lösung Beispiel 3   "$

(%i25) "**"$

(%i26) 'diff(y(x),x)*(1-x^2)-x*y(x)=0;

(%o26) $\left(1 - x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right) - x\,y(x) = 0$

(%i27) ode2(%,y(x),x);

(%o27) $y(x) = \%C\ \%e^{-\frac{\log(x^2-1)}{2}}$

(%i28) "**"$

(%i30) " Lösung Beispiel 4 "$

(%i31) "**"$

(%i32) 'diff(y(x),x)+exp(x)*(1+y(x)^2)=0;

(%o32) $\frac{d}{d\,x} y(x) + \%e^{x} \left(y(x)^2 + 1\right) = 0$

(%i33) ode2(%,y(x),x);

(%o33) $-\operatorname{atan}(y(x)) = \%e^{x} + \%C$

(%i34) solve(%,y(x));

(%o34) $[\, y(x) = -\tan\left(\%e^{x} + \%C\right)]$

(%i35) "**"$

(%i36) " Lösung Beispiel 5 "$

(%i37) "**"$

(%i38)

(%i1) `x(t)='diff(x(t),t);`

(%o1) $$x(t)=\frac{d}{d\,t}\,x(t)$$

(%i2) `desolve(%,x(t));`

(%o2) $$x(t)=x(0)\,\%e^{t}$$

(%i3) `"*******************************************************"$`

(%i4) `x(t)='diff(x(t),t,2);`

(%o4) $$x(t)=\frac{d^2}{d\,t^2}\,x(t)$$

(%i5) `desolve(%,x(t));`

(%o5) $$x(t)=\frac{\%e^{t}\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,x(t)\right|_{t=0}+x(0)\right)}{2}-\frac{\%e^{-t}\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,x(t)\right|_{t=0}-x(0)\right)}{2}$$

(%i6) `ode2(%o4,x(t),t);`

(%o6) $$x(t)=\%K1\,\%e^{t}+\%K2\,\%e^{-t}$$

(%i7) `"*******************************************************"$`

(%i9) `x(t)+'diff(x(t),t)+'diff(x(t),t,2)=0;`

(%o9) $$\frac{d^2}{d\,t^2}\,x(t)+\frac{d}{d\,t}\,x(t)+x(t)=0$$

(%i10) `desolve(%,x(t));`

(%o10) $$x(t)=\%e^{-\frac{t}{2}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)\left(2\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,x(t)\right|_{t=0}+x(0)\right)-x(0)\right)}{\sqrt{3}}+x(0)\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)\right)$$

(%i11) `ode2(%o9,x(t),t);`

(%o11) $$x(t)=\%e^{-\frac{t}{2}}\left(\%K1\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)+\%K2\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)\right)$$

(%i12) `"*******************************************************"$`

(%i13) `" Elementare Differentialgleichungen                  "$`

(%i14) `"*******************************************************"$`

(%i15)

Analysis: Differentialgleichung mit Anfangswert

(%i1) `dg:'diff(y(x),x)=exp(x-y(x));`

(%o1) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) = \%e^{x - y(x)}$

(%i2) `ode2(dg,y(x),x);`

(%o2) $\%e^{y(x)} - \%e^{x} = \%C$

(%i3) `solve(%,y(x));`

(%o3) $[\,y(x) = \log\left(\%e^{x} + \%C\right)\,]$

(%i4) `y(x):=log(exp(x)+C);`

(%o4) $y(x) := \log\left(EXP(x) + C\right)$

allgemeine Lösung

(%i5) `y(0)=1;`

(%o5) $\log(C + 1) = 1$

(%i6) `solve(%,C);`

(%o6) $[\,C = \%e - 1\,]$

(%i7) `C:exp(1)-1;`

(%o7) $\%e - 1$

(%i8) `y(x);`

(%o8) $\log\left(\%e^{x} + \%e - 1\right)$

(%i9)

spezielle Lösung für Anfangswert

(%i1) dg:'diff(y,x)=(y+1)*sin(x);

(%o1) $\frac{d}{d\,x}\,y = \sin(x)\,(y+1)$

(%i2) ode2(dg,y,x);

(%o2) $y = \%e^{-\cos(x)}\,\left(\%C - \%e^{\cos(x)}\right)$

(%i7) y(x):=exp(-cos(x))*(C-exp(cos(x)));

(%o7) $y(x) := EXP(-\cos(x))\,(C - EXP(\cos(x)))$

(%i8) g:y(%pi/2)=4;

(%o8) $C - 1 = 4$

(%i9) solve(g,C);

(%o9) $[\,C = 5\,]$

(%i10) y(x),C=5;

(%o10) $\%e^{-\cos(x)}\,\left(5 - \%e^{\cos(x)}\right)$

(%i11) expand(%);

(%o11) $5\ \%e^{-\cos(x)} - 1$

(%i12) "**"$

(%i13) " Das ist die spezielle Lösung dieser Gleichung   "$

(%i14) "**"$

(%i15)

Analysis: Differentialgleichung, einfaches Beispiel

(%i1) dg:2*x*y(x)+(1+x^2)*'diff(y(x),x)=0;

(%o1) $\left(x^2+1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)+2\,x\,y(x)=0$

(%i2) ode2(dg,y(x),x);

(%o2) $y(x)=\frac{\%C}{x^2+1}$

(%i3) y(x):=K/(x^2+1);

(%o3) $y(x):=\frac{K}{x^2+1}$

(%i4) g:y(1)=10;

(%o4) $\frac{K}{2}=10$

(%i5) solve(g,K);

(%o5) [K = 20]

(%i6) y(x),K=20;

(%o6) $\frac{20}{x^2+1}$

(%i7) y(x):=20/(x^2+1);

(%o7) $y(x):=\frac{20}{x^2+1}$

(%i8) "=="$

(%i9) " Gesuchte spezielle Lösung   "$

(%i10) "=="$

(%i11)

(%i2) dg:'diff(y(x),x)=1-y(x)^2;

(%o2) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) = 1 - y(x)^2$

(%i3) ode2(dg,y(x),x);

(%o3) $\frac{\log(y(x)+1) - \log(y(x)-1)}{2} = x + \%C$

(%i9) g:%o3;

(%o9) $\frac{\log(y(x)+1) - \log(y(x)-1)}{2} = x + \%C$

(%i10) g:g*2;

(%o10) $\log(y(x)+1) - \log(y(x)-1) = 2\,(x + \%C)$

(%i11) "===$"

(%i12) " Hier muss man konventionell umformen "$

(%i13) "===$"

(%i14) g:log((y(x)+1)/(y(x)-1))=2*(x+%C);

(%o14) $\log\left(\frac{y(x)+1}{y(x)-1}\right) = 2\,(x + \%C)$

(%i15) solve(g,y(x));

(%o15) $[\,y(x) = \frac{\%e^{2\,x + 2\,\%C} + 1}{\%e^{2\,x + 2\,\%C} - 1}\,]$

(%i17) y(x):=(exp(2*x+2*K)+1)/(exp(2*x+2*K)-1);

(%o17) $y(x) := \frac{\mathrm{EXP}(2\,x + 2\,K) + 1}{\mathrm{EXP}(2\,x + 2\,K) - 1}$

(%i18) g:y(0)=0;

(%o18) $\frac{\%e^{2\,K} + 1}{\%e^{2\,K} - 1} = 0$

(%i19) solve(g,K);

(%o19) $[\,K = \log(-\%i)\,,\ K = \log(\%i)\,]$

(%i20) g:%o3;

(%o20) $\frac{\log(y(x)+1) - \log(y(x)-1)}{2} = x + \%C$

(%i1) g:log((y(x)+1)/(y(x)-1))=2*x+K;

(%o1) $\log\left(\frac{y(x)+1}{y(x)-1}\right) = 2\,x + K$

(%i2) solve(g,y(x));

(%o2) $[\,y(x) = \frac{\%e^{2\,x + K} + 1}{\%e^{2\,x + K} - 1}\,]$

(%i3) y(x):=(exp(2*x+K)+1)/(exp(2*x+K)-1);

(%o3) $y(x) := \frac{EXP(2\ x + K) + 1}{EXP(2\ x + K) - 1}$

(%i4) g:y(0)=0;

(%o4) $\frac{\%e^{K} + 1}{\%e^{K} - 1} = 0$

(%i5) solve(g,K);

(%o5) $[\ K = \log(-1)\ ]$

(%i6) y(x),K=log(-1);

(%o6) $\frac{1 - \%e^{2\ x}}{-\%e^{2\ x} - 1}$

(%i9) "===$"

(%i10) " oben und unten -1 herausheben "$

(%i11) "===$"

(%i12) y(x):=(exp(2*x)-1)/(exp(2*x)+1);

(%o12) $y(x) := \frac{EXP(2\ x) - 1}{EXP(2\ x) + 1}$

(%i21) "===$"

(%i22) " Man kann zeigen, dass y(x):=tanh(x) herauskommt "$

(%i23) "===$"

(%i24)

Analysis: Differentialgleichungen, einfaches Beispiel

```
(%i1) x*(x+1)*'diff(y(x),x)+(x-2)*y(x)^2=0;
```

(%o1) $x\,(x+1)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)+(x-2)\,y(x)^2=0$

```
(%i3) dg:%o1;
```

(%o3) $x\,(x+1)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)+(x-2)\,y(x)^2=0$

```
(%i4) ode2(dg,y(x),x);
```

(%o4) $\frac{1}{y(x)}=3\,\log(x+1)-2\,\log(x)+\%C$

```
(%i5) solve(%,y(x));
```

(%o5) $[\,y(x)=\frac{1}{3\,\log(x+1)-2\,\log(x)+\%C}\,]$

```
(%i6) "=====================================================" $
(%i7) " Das ist die allgemeine Lösung                       " $
(%i8) "=====================================================" $
(%i9)
```

```
(%i1) "**************************************************"$
(%i2) " Freier Fall                                      "$
(%i3) "**************************************************"$
(%i4) 'diff(x(t),t,2)=g;
```

(%o4) $$\frac{d^2}{d\,t^2}\,x(t) = g$$

Das ist die Differentialgleichung für den freien Fall:
Beschleunigung = Erdbeschleunigung

```
(%i5) ode2(%,x(t),t);
```

(%o5) $$x(t) = \frac{g\,t^2}{2} + \%K2\,t + \%K1$$

```
(%i7) "**************************************************"$
(%i8) " K1 ist x(0) und K2 ist v(0)                      "$
(%i9) "**************************************************"$
(%i10)
```

```
(%i1) "================================================="$
(%i2) " Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit        "$
(%i3) "================================================="$
(%i4) 'diff(s(t),t)=v;
```

(%o4) $\frac{d}{d\,t}\,s\left(t\right)=v$

```
(%i5) dg:%;
```

(%o5) $\frac{d}{d\,t}\,s\left(t\right)=v$

```
(%i6) ode2(dg,s(t),t);
```

(%o6) $s\left(t\right)=t\,v+\%c$

```
(%i7) "================================================="$
(%i9) " die bekannte Lösung                            "$
(%i10) "================================================="$
(%i11)
```

```
(%i1) "===================================================="$
(%i2) " Beschleunigung ( mit Reibung)                      "$
(%i3) "===================================================="$
(%i4) dg:10*'diff(v(t),t)+v(t)=40;
```

(%o4) $10\left(\frac{d}{d\,t}v\left(t\right)\right)+v\left(t\right)=40$

```
(%i5) ode2(dg,v(t),t);
```

(%o5) $v\left(t\right)=\%e^{-\frac{t}{10}}\left(40\ \%e^{t/10}+\%C\right)$

```
(%i6) expand(%);
```

(%o6) $v\left(t\right)=\%C\ \%e^{-\frac{t}{10}}+40$

```
(%i7) "===================================================="$
(%i8) " Das ist die allgemeine Lösung                      "$
(%i9) "===================================================="$
(%i11) v(t):=K*exp(-t/10)+40;
```

(%o11) $v\left(t\right):=K\ EXP\left(\frac{-\ t}{10}\right)+40$

```
(%i12) g:v(0)=10;
```

(%o12) $K+40=10$

```
(%i13) solve(g,K);
```

(%o13) $[\ K=-\ 30\ ]$

```
(%i14) v(t),K=-30;
```

(%o14) $40-30\ \%e^{-\frac{t}{10}}$

```
(%i15) v(t):=40-30*exp(-t/10);
```

(%o15) $v\left(t\right):=40-30\ EXP\left(\frac{-\ t}{10}\right)$

```
(%i16) "===================================================="$
(%i17) " Das ist die spezielle Lösung                       "$
(%i18) "===================================================="$
(%i19) limit(v(t),t,INF);
```

(%o19) 40

```
(%i20) "===================================================="$
(%i21) " Die Endgeschwindigkeit ist 40                      "$
(%i22) "===================================================="$
(%i23)
```

```
(%i1) "************************************************************"$
(%i2) " Aufladung eines Kondensators                                 "$
(%i3) "************************************************************"$
(%i4) dg:R*C*'diff(u(t),t)+u(t)=u0;
```

Ein Kondensator dient zum Speichern von Ladungen

(%o4) $C\,R\left(\frac{d}{d\,t}u(t)\right)+u(t)=u0$

```
(%i5) ode2(dg,u(t),t);
```

(%o5) $u(t)=\%e^{-\frac{t}{C\,R}}\left(\%e^{\frac{t}{C\,R}}\,u0+\%C\right)$

```
(%i14) u(t):=exp(-t/(C*R))*(exp(t/(C*R))*u0+K);
```

(%o14) $u(t):=EXP\left(\frac{-t}{C\,R}\right)\left(EXP\left(\frac{t}{C\,R}\right)u0+K\right)$

```
(%i15) g:u(0)=0;
```

(%o15) $u0+K=0$

```
(%i16) solve(g,K);
```

(%o16) $[K=-u0]$

```
(%i17) u(t),K=-u0;
```

(%o17) $\%e^{-\frac{t}{C\,R}}\left(\%e^{\frac{t}{C\,R}}\,u0-u0\right)$

```
(%i18) expand(%);
```

(%o18) $u0-\%e^{-\frac{t}{C\,R}}\,u0$

```
(%i20) u(t):=u0*(1-exp(-t/(C*R)));
```

(%o20) $u(t):=u0\left(1-EXP\left(\frac{-t}{C\,R}\right)\right)$

```
(%i21) "======================================================"$
(%i22) " Das ist die gesuchte spezielle Lösung                  "$
(%i23) "======================================================"$
(%i24)
```

Analysis: Differentialgleichung, einfache Aufgabe

(%i1) 'diff(y(x),x)+(2*x)/(1+x^2)*y(x)=(1-6*x^2)/(1+x^2);

(%o1) $$\frac{d}{d\,x}\,y(x)+\frac{2\,x\,y(x)}{x^2+1}=\frac{1-6\,x^2}{x^2+1}$$

(%i2) dg:%;

(%o2) $$\frac{d}{d\,x}\,y(x)+\frac{2\,x\,y(x)}{x^2+1}=\frac{1-6\,x^2}{x^2+1}$$

(%i3) ode2(dg,y(x),x);

(%o3) $$y(x)=\frac{-2\,x^3+x+\%C}{x^2+1}$$

```
(%i4) "=====================================================" $
(%i5) " Allgemeine Lösung                                   " $
(%i6) "=====================================================" $
(%i7)
```

(%i5) `'diff(y(x),x)-1/x*y(x)=(x^2+x+1)/x;`

(%o5) $$\frac{d}{d\,x}\,y(x)-\frac{y(x)}{x}=\frac{x^2+x+1}{x}$$

(%i6) `dg:%;`

(%o6) $$\frac{d}{d\,x}\,y(x)-\frac{y(x)}{x}=\frac{x^2+x+1}{x}$$

(%i7) `ode2(dg,y(x),x);`

(%o7) $$y(x)=x\left(\log(x)+x-\frac{1}{x}+\%C\right)$$

(%i8) `y(x):=x*(log(x)+x-1/x+%C);`

(%o8) $$y(x):=x\left(\log(x)+x+\frac{-1}{x}+\%C\right)$$

(%i9) `y(1)=-3;`

(%o9) $\%C=-3$

(%i13) `y(x),%C=-3;`

(%o13) $$x\left(\log(x)+x-\frac{1}{x}-3\right)$$

(%i14) `expand(%);`

(%o14) $x\log(x)+x^2-3\,x-1$

(%i15) `"*****************************************************"$`

(%i16) `" das ist die gesuchte spezielle Lösung                 "$`

(%i17) `"*****************************************************"$`

(%i18)

Analysis: Differentialgleichung, einfaches Beispiel

```
(%i1) 'diff(y(x),x)+4*x*y(x)=4*x*exp(-2*x^2);
```

(%o1) $\frac{d}{d\,x}\,y(x)+4\,x\,y(x)=4\,x\,\%e^{-2\,x^2}$

```
(%i2) dg:%;
```

(%o2) $\frac{d}{d\,x}\,y(x)+4\,x\,y(x)=4\,x\,\%e^{-2\,x^2}$

```
(%i3) ode2(dg,y(x),x);
```

(%o3) $y(x)=\left(2\,x^2+\%C\right)\,\%e^{-2\,x^2}$

```
(%i4) "========================================================="$
(%i5)
```

Analysis: Differentialgleichung, einfaches Beispiel für eine inhomogene DIFFGL

(%i1) 'diff(y(x),x)+y(x)/(x+1)=exp(-x);

(%o1) $$\frac{d}{d\,x}\,y(x)+\frac{y(x)}{x+1}=\%e^{-x}$$

(%i2) dg:%;

(%o2) $$\frac{d}{d\,x}\,y(x)+\frac{y(x)}{x+1}=\%e^{-x}$$

(%i3) ode2(dg,y(x),x);

(%o3) $$y(x)=\frac{(-x-1)\,\%e^{-x}-\%e^{-x}+\%C}{x+1}$$

(%i4) "===$

(%i5) " Allgemeine Lösung dieser inhomogenen DIFFGL   "$

(%i6) "===$

(%i7)

Analysis: Differentialgleichungen, einfaches Beispiel

(%i1) `2*x*y(x)*'diff(y(x),x)-x^2=y(x)^2;`

(%o1) $$2\,x\,y(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)-x^2=y(x)^2$$

(%i2) `dg:%;`

(%o2) $$2\,x\,y(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)-x^2=y(x)^2$$

(%i3) `ode2(dg,y(x),x);`

(%o3) $$\frac{y(x)^2-x^2}{x}=\%C$$

(%i4) `solve(%,y(x));`

(%o4) $$[\,y(x)=-\sqrt{x^2+\%C\,x}\,,\;y(x)=\sqrt{x^2+\%C\,x}\,]$$

(%i5) `"=====================================================" $`

(%i6) `" Das ist die gesuchte Lösung                          " $`

(%i7) `"=====================================================" $`

(%i8)

(%i1) `y(x)*'diff(y(x),x)=exp(-y(x)^2);`

(%o1) $$y(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)=\%e^{-y(x)^2}$$

(%i2) `dg:%;`

(%o2) $$y(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)=\%e^{-y(x)^2}$$

(%i3) `ode2(dg,y(x),x);`

(%o3) $$\frac{\%e^{y(x)^2}}{2}=x+\%C$$

(%i4) `solve(%,y(x));`

(%o4) $$[\,y(x)=-\sqrt{\log(2\,x+2\,\%C)}\,,\ y(x)=\sqrt{\log(2\,x+2\,\%C)}\,]$$

(%i5) `"====================================================="$`

(%i6) `" Das ist die gesuchte Lösung                        "$`

(%i7) `"====================================================="$`

(%i8)

Analysis: Differentialgleichungen, einfaches Beispiel

(%i1) `x*(x+1)*'diff(y(x),x)+(x-2)*y(x)^2=0;`

(%o1) $x\,(x+1)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)+(x-2)\,y(x)^2=0$

(%i3) `dg:%o1;`

(%o3) $x\,(x+1)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)+(x-2)\,y(x)^2=0$

(%i4) `ode2(dg,y(x),x);`

(%o4) $\frac{1}{y(x)}=3\log(x+1)-2\log(x)+\%C$

(%i5) `solve(%,y(x));`

(%o5) $\left[\,y(x)=\frac{1}{3\log(x+1)-2\log(x)+\%C}\,\right]$

(%i6) `"====================================================="$`

(%i7) `" Das ist die allgemeine Lösung                        "$`

(%i8) `"====================================================="$`

(%i9)

(%i1) "=="$

(%i2) " Differentialgleichungen   "$

(%i3) "=="$

(%i5) 'diff(y(x),x)-x*y(x)=1;

(%o5) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) - x\,y(x) = 1$

(%i6) dg:%;

(%o6) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) - x\,y(x) = 1$

(%i7) ode2(dg,y(x),x);

(%o7) $y(x) = \%e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\%pi}\;erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{2} + \%c \right)$

(%i8) "=="$

(%i9) (1+x)*'diff(y(x),x)-n*y(x)=0;

(%o9) $(x+1)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right) - n\,y(x) = 0$

(%i10) dg:%;

(%o10) $(x+1)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right) - n\,y(x) = 0$

(%i11) ode2(dg,y(x),x);

(%o11) $y(x) = \%c\;\%e^{n\,log(x+1)}$

(%i12) "=="$

(%i13) 'diff(y(x),x,2)+y(x)=0;

(%o13) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y(x) + y(x) = 0$

(%i14) dg:%;

(%o14) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y(x) + y(x) = 0$

(%i15) ode2(dg,y(x),x);

(%o15) $y(x) = \%k1\;sin(x) + \%k2\;cos(x)$

(%i16) "=="$

(%i20)

(%i1) `'diff(y(x),x)-4*y(x)=exp(4*x)+cos(2*x);`

(%o1) $$\frac{d}{d\,x}\,y(x)-4\,y(x)=\cos(2\,x)+\%e^{4\,x}$$

(%i2) `dg:%;`

(%o2) $$\frac{d}{d\,x}\,y(x)-4\,y(x)=\cos(2\,x)+\%e^{4\,x}$$

(%i3) `ode2(dg,y(x),x);`

(%o3) $$y(x)=\%e^{4\,x}\left(\frac{\%e^{-4\,x}\,(2\,\sin(2\,x)-4\,\cos(2\,x))}{20}+x+\%C\right)$$

(%i4) `"=========================================================="$`

(%i5) `" Das ist die allgemeine Lösung                             "$`

(%i6) `"=========================================================="$`

(%i7)

(%i1) `'diff(y(x),x)*sin(x)-y(x)*cos(x)=4*sin(x)^4;`

(%o1) $$\sin(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)-y(x)\cos(x)=4\sin(x)^4$$

(%i2) `dg:%;`

(%o2) $$\sin(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,y(x)\right)-y(x)\cos(x)=4\sin(x)^4$$

(%i3) `ode2(dg,y(x),x);`

(%o3) $$y(x)=\sin(x)\left(2\left(x-\frac{\sin(2\,x)}{2}\right)+\%C\right)$$

(%i7) `expand(%o3);`

(%o7) $$y(x)=-\sin(x)\sin(2\,x)+2\,x\sin(x)+\%C\sin(x)$$

(%i11) `trigexpand(%o3);`

(%o11) $$y(x)=\sin(x)\left(2\left(x-\cos(x)\sin(x)\right)+\%C\right)$$

(%i12) `expand(%);`

(%o12) $$y(x)=-2\cos(x)\sin(x)^2+2\,x\sin(x)+\%C\sin(x)$$

(%i16) `trigsimp(%o12);`

(%o16) $$y(x)=(2\,x+\%C)\sin(x)-2\cos(x)\sin(x)^2$$

(%i17) `factor(%);`

(%o17) $$y(x)=-\sin(x)\left(2\cos(x)\sin(x)-2\,x-\%C\right)$$

(%i19) `"====================================================="$`

(%i20) `" Allgemeine Lösung                                   "$`

(%i21) `"====================================================="$`

(%i22)

(%i1) 'diff(y(x),x)+5*y(x)=cos(x)*exp(-5*x);

(%o1) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) + 5\,y(x) = \%e^{-5\,x}\,\cos(x)$

(%i2) dg:%;

(%o2) $\frac{d}{d\,x}\,y(x) + 5\,y(x) = \%e^{-5\,x}\,\cos(x)$

(%i3) ode2(dg,y(x),x);

(%o3) $y(x) = \%e^{-5\,x}\,(\sin(x) + \%C)$

(%i4) "=="$

(%i5) " Allgemeine Lösung "$

(%i6) "=="$

(%i7) y(x):=exp(-5*x)*(sin(x)+%C);

(%o7) $y(x) := \mathrm{EXP}((-5)\,x)\,(\sin(x) + \%C)$

(%i8) y(%pi/2)=0;

(%o8) $\%e^{-\frac{5\,\%pi}{2}}\,(\%C + 1) = 0$

(%i9) solve(%,%C);

(%o9) $[\,\%C = -1\,]$

(%i10) y(x),%C=-1;

(%o10) $\%e^{-5\,x}\,(\sin(x) - 1)$

(%i11) "=="$

(%i12) " Spezielle Lösung "$

(%i13) "=="$

(%i14)

(%i1) 'diff(y(x),x)+y(x)=exp(-x)/(1+x^2);

(%o1) $\frac{d}{d\,x}\,y(x)+y(x)=\frac{\%e^{-x}}{x^2+1}$

(%i2) dg:%;

(%o2) $\frac{d}{d\,x}\,y(x)+y(x)=\frac{\%e^{-x}}{x^2+1}$

(%i3) ode2(dg,y(x),x);

(%o3) $y(x)=\%e^{-x}\left(\mathrm{atan}(x)+\%C\right)$

(%i4) y(x):=exp(-x)*(atan(x)+%C);

(%o4) $y(x):=\mathrm{EXP}(-x)\left(\mathrm{atan}(x)+\%C\right)$

(%i5) y(0)=2;

(%o5) $\%C=2$

(%i6) y(x),%C=2;

(%o6) $\%e^{-x}\left(\mathrm{atan}(x)+2\right)$

(%i7) "==="$

(%i8) " Das ist die gesuchte spezielle Lösung "$

(%i9) "==="$

(%i10)

(%i1) `'diff(i(t),t)+cos(t)*i(t)=2*cos(t);`

(%o1) $$\frac{d}{d\,t}\,i(t) + i(t)\cos(t) = 2\cos(t)$$

(%i2) `dg:%;`

(%o2) $$\frac{d}{d\,t}\,i(t) + i(t)\cos(t) = 2\cos(t)$$

(%i3) `ode2(dg,i(t),t);`

(%o3) $$i(t) = \%e^{-\sin(t)}\left(2\,\%e^{\sin(t)} + \%C\right)$$

(%i4) `expand(%);`

(%o4) $$i(t) = \%C\,\%e^{-\sin(t)} + 2$$

(%i5) `"====================================================="$`

(%i6) `" Allgemeine Lösung (Stromstärke)                       "$`

(%i7) `"====================================================="$`

(%i8) `i(t):=%C*exp(-sin(t))+2;`

(%o8) $$i(t) := \%C\,\mathrm{EXP}(-\sin(t)) + 2$$

(%i9) `i(0)=0;`

(%o9) $$\%C + 2 = 0$$

(%i10) `solve(%,%C);`

(%o10) $$[\,\%C = -2\,]$$

(%i11) `i(t),%C=-2;`

(%o11) $$2 - 2\,\%e^{-\sin(t)}$$

(%i12) `"====================================================="$`

(%i13) `" Das ist die spezielle Lösung                          "$`

(%i14) `"====================================================="$`

(%i15)

(%i1) "===" $

(%i2) " CHEMISCHE REAKTION " $

(%i3) "===" $

(%i4) 'diff(x(t),t)=k*(c-x(t))^2;

(%o4) $$\frac{d}{d\,t}\,x(t) = k\,(c - x(t))^2$$

(%i5) dg:%;

(%o5) $$\frac{d}{d\,t}\,x(t) = k\,(c - x(t))^2$$

(%i6) ode2(dg,x(t),t);

(%o6) $$-\frac{1}{k\,x(t) - c\,k} = t + \%C$$

(%i7) solve(%,x(t));

(%o7) $$\left[\, x(t) = \frac{c\,k\,t + \%C\,c\,k - 1}{k\,t + \%C\,k} \,\right]$$

(%i8) x(t):=(c*k*t + %C*c*k -1)/(k*t+%C*k);

(%o8) $$x(t) := \frac{c\,k\,t + \%C\,c\,k - 1}{k\,t + \%C\,k}$$

(%i9) g:x(0)=0;

(%o9) $$\frac{\%C\,c\,k - 1}{\%C\,k} = 0$$

(%i10) solve(g,%C);

(%o10) $$\left[\, \%C = \frac{1}{c\,k} \,\right]$$

(%i11) x(t),%C=1/(c*k);

(%o11) $$\frac{c\,k\,t}{k\,t + \frac{1}{c}}$$

(%i12) expand(%);

(%o12) $$\frac{c\,k\,t}{k\,t + \frac{1}{c}}$$

(%i13) factor(%);

(%o13) $$\frac{c^2\,k\,t}{c\,k\,t + 1}$$

(%i14) "===" $

(%i15) " Das ist die Lösung " $

(%i16) "===" $

(%i17) x(t):=%o13;

(%o17) $x(t) := \%o13$

(%i18) x(t);

(%o18) $\frac{c^2\, k\, t}{c\, k\, t+1}$

```
(%i19) limit(x(t),t,INF);
```

Grenzwertberechnung

(%o19) c

```
(%i20) "====================================================="$
(%i21) " c ist die Anzahl der entstandenen Moleküle         "$
(%i22) "====================================================="$
(%i23)
```

```
(%i1) y(t)='diff(y(t),t,2);
```

(%o1) $y(t) = \frac{d^2}{d\,t^2}\, y(t)$

```
(%i2) dg:%;
```

(%o2) $y(t) = \frac{d^2}{d\,t^2}\, y(t)$

die Differentialgleichung wird einem Objekt "dg" zugeordnet

```
(%i3) ode2(dg,y(t),t);
```

(%o3) $y(t) = \%K1\ \%e^{t} + \%K2\ \%e^{-t}$

```
(%i4) "=============================================================="$
(%i5) y(t)=-'diff(y(t),t,2);
```

(%o5) $y(t) = -\frac{d^2}{d\,t^2}\, y(t)$

```
(%i6) dg:%;
```

(%o6) $y(t) = -\frac{d^2}{d\,t^2}\, y(t)$

```
(%i7) ode2(dg,y(t),t);
```

(%o7) $y(t) = \%K1\ \sin(t) + \%K2\ \cos(t)$

```
(%i8) "=============================================================="$
(%i9) "Vorzeichen verursacht einen erheblichen Unterschied "$
(%i10) "=============================================================="$
(%i11)
```

```
(%i1) "==================================================="$
(%i2) " Differenzengleichungen                          "$
(%i3) "==================================================="$
(%i4) g(n):=x[n+1]:(n+1)*x[n];
```

(%o4) $g\left(n\right):=x_{n+1}:\left(n+1\right)\,x_n$

```
(%i5) x[1]:1;
(%o5) 1
(%i6) g(1);
(%o6) 2
(%i7) g(2);
(%o7) 6
(%i8) g(3);
(%o8) 24
(%i9) g(4);
(%o9) 120
(%i10) "==================================================="$
(%i11) " Es handelt sich um die Folge der Fakultäten   "$
(%i12) "==================================================="$
(%i13) kill(all);
(%o0) done
(%i1) g(n):=x[n+1]:n*x[n]+(n+1)!;
```

(%o1) $g\left(n\right):=x_{n+1}:n\,x_n+\left(n+1\right)!$

```
(%i2) x[0]:0;
(%o2) 0
(%i3) g(0);
(%o3) 1
(%i4) g(1);
(%o4) 3
(%i5) g(2);
(%o5) 12
(%i6)
```

Differenzengleichungen sind für Simulationen sehr nützlich (Systemdynamik)

```
(%i1) "=================================================="$
(%i2) " Physikalische Konstanten                         "$
(%i3) "=================================================="$
(%i5) load(physconst);
(%o5)
C:/Programme/Maxima-5.9.3/share/maxima/5.9.3/share/physics/physconst.mac
(%i6) fpprec : 8;
(%o6) 8
(%i7) "=================================================="$
(%i8) " Anzeigegenauigkeit                               "$
(%i9) "=================================================="$
(%i10) %%c;
```

(%o10) $\%\%c$

```
(%i11) %,numer;
```

(%o11) $\dfrac{299792458\ m}{s}$

```
(%i12) %c_0;
```

(%o12) $\%c\_0$

```
(%i13) %,numer;
```

(%o13) $\dfrac{299792458\ m}{s}$

```
(%i14) "=================================================="$
(%i15) " Lichtgeschwindigkeit im Vakuum                   "$
(%i16) "=================================================="$
(%i17) %e_0;
```

(%o17) $\%e\_0$

```
(%i18) %,numer;
```

(%o18) $\dfrac{8.85418782\ 10^{-12}\ F}{m}$

```
(%i19) "=================================================="$
(%i20) " Konstante im Coulombgesetz                       "$
(%i21) "=================================================="$
(%i22) %G;
```

(%o22) $\%G$

```
(%i23) %,numer;
```

(%o23) $\dfrac{6.673\ 10^{-11}\ m^3}{kg\ s^2}$

```
(%i24) "=================================================="$
(%i25) " Gravitationskonstante                            "$
```

```
(%i26) "==============================================="$
(%i27) %%e;
(%o27) %%e
(%i28) %,numer;
(%o28) 1.60217646 10^-19 C
(%i29) "==============================================="$
(%i30) " Elementarladung                               "$
(%i31) "==============================================="$
(%i32) %alpha;
(%o32) %alpha
(%i33) %,numer;
(%o33) 0.00729735
(%i38) "==============================================="$
(%i39) " Feinstrukturkonstante                         "$
(%i40) "==============================================="$
(%i41) %Ry;
(%o41) %Ry
(%i42) %,numer;
```

$$(\%o42)\quad \frac{1.09737316\ 10^{+7}}{m}$$

```
(%i43) "==============================================="$
(%i44) " Rydberg-Konstante                             "$
(%i45) "==============================================="$
(%i46) %a_0;
(%o46) %a_0
(%i47) %,numer;
(%o47) 5.29177208 10^-11 m
(%i48) "==============================================="$
(%i49) " Bohr Radius                                   "$
(%i50) "==============================================="$
(%i51) %m_e;
(%o51) %m_e
(%i52) %,numer;
(%o52) 9.10938188 10^-31 kg
(%i53) "==============================================="$
(%i54) " Elektronenmasse                               "$
(%i55) "==============================================="$
```

```
(%i56) %lambdaC;
(%o56) %lambdaC
(%i57) %,numer;
(%o57) 2.42631022 10^-12 m
(%i58) "=================================================="$
(%i59) " Comptonwellenlänge                              "$
(%i60) "=================================================="$
(%i61) %r_e;
(%o61) %r_e
(%i62) %,numer;
(%o62) 2.81794029 10^-15 m
(%i63) "=================================================="$
(%i64) " Elektronenradius                                "$
(%i65) "=================================================="$
(%i66) %m_p;
(%o66) %m_p
(%i67) %,numer;
(%o67) 1.67262158 10^-27 kg
(%i68) "=================================================="$
(%i69) " Protonenmasse                                   "$
(%i70) "=================================================="$
(%i71) %m_n;
(%o71) %m_n
(%i72) %,numer;
(%o72) 1.67492716 10^-27 kg
(%i73) "=================================================="$
(%i74) " Neutronenmasse                                  "$
(%i75) "=================================================="$
(%i76) %m_alpha;
(%o76) %m_alpha
(%i77) %,numer;
(%o77) 6.64465598 10^-27 kg
(%i78) "=================================================="$
(%i79) " Masse des Alpha-Teilchens                       "$
(%i80) "=================================================="$
(%i81) %N_A;
(%o81) %N_A
```

(%i82) %,numer;

(%o82) $\frac{6.02214199\ 10^{+23}}{mol}$

(%i83) "==="$

(%i84) " Avogadrokonstante   "$

(%i85) "==="$

(%i86) %m_u;

(%o86) %m_u

(%i87) %,numer;

(%o87) $1.66053873\ 10^{-27}\ kg$

(%i88) "==="$

(%i89) " atomare Massenkonstante   "$

(%i90) "==="$

(%i91) %%F;

(%o91) %%F

(%i92) %,numer;

(%o92) $\frac{96485.341\ C}{mol}$

(%i93) "==="$

(%i94) " Faraday-Konstante   "$

(%i95) "==="$

(%i96) %n_0;

(%o96) %n_0

(%i97) %,numer;

(%o97) $\frac{2.6867775\ 10^{+25}}{m^3}$

(%i98) "==="$

(%i99) " Loschmidt-Konstante   "$

(%i100) "==="$

(%i101) %sigma;

(%o101) %sigma

(%i102) %,numer;

(%o102) $\frac{5.6704\ 10^{-8}\ W}{m^2\ K^4}$

(%i103) "==="$

(%i104) " Stefan-Boltzman-Konstante   "$

(%i105) "==="$

(%i106) " es gibt noch weitere Konstante   "$

```
(%i108) " -> das Makro physconst.mac mit einem           "$
(%i109) " Texteditor ausdrucken                          "$
(%i110) "==============================================="$
(%i111)
```

```
(%i1) "=================================================="$
(%i5) " GRAVITATIONSGESETZ                               "$
(%i6) "=================================================="$
(%i7) load(physconst);
(%o7)
C:/Programme/Maxima-5.9.3/share/maxima/5.9.3/share/physics/physconst.mac
(%i10) Gravitationsgesetz:F=%G*(m[1]*m[2])/r^2;
```

(%o10) $F = \frac{m_1\ m_2\ \%G}{r^2}$

```
(%i11) solve(Gravitationsgesetz,F);
```

(%o11) $[\ F = \frac{m_1\ m_2\ \%G}{r^2}\ ]$

```
(%i12) solve(Gravitationsgesetz,m[1]);
```

(%o12) $[\ m_1 = \frac{r^2\ F}{m_2\ \%G}\ ]$

```
(%i13) solve(Gravitationsgesetz,m[2]);
```

(%o13) $[\ m_2 = \frac{r^2\ F}{m_1\ \%G}\ ]$

```
(%i14) solve(Gravitationsgesetz,r);
```

(%o14) $[\ r = -\sqrt{\frac{m_1\ m_2\ \%G}{F}}\ ,\ r = \sqrt{\frac{m_1\ m_2\ \%G}{F}}\ ]$

```
(%i16) fpprec : 8;
(%o16) 8
(%i17) %G,numer;
```

(%o17) $\frac{6.673\ 10^{-11}\ m^3}{kg\ s^2}$

```
(%i18)
```

Quellen- und Literaturverzeichnis

Manfred Brill, Mathematik für Informatik, Hanser Verlag
http://www.edhelper.com
http://www.hit4u.at/maxima
http://www.hit4u.at/maxima2005
Johann Weilharter, Spaß mit Algorithmen, Vieweg
Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg
Karl Schick, Probleme aus der Preistheorie, Diesterweg Salle
Karl Schick, Probleme aus der Produktionstheorie, Diesterweg
Steiner, Weilharter, Mathematik u.i.Anw.i.d.W. 3, Reniets
Hartmut Bossel, Systemdynamik, Vieweg
N.M. Günter und R.O. Kusmin, Aufgabensammlung zur Höheren Mathematik II,
Deutscher Verlag der Wissenschaften
M. Feilmeier und HJ. Wacker, Numerische Mathematik, Bayerischer Schulbuch-Verlag
Peter Hartmann, Mathematik für Informatiker, Vieweg
R. Müller-Fonfara und W. Scholl, Mathematik verstehen, Falkenverlag